فضای حقیقی nـ بعدی

ریاضیات کلاسیک بر دو رکن اساسی "عدد" و "فضا" بنا شده است. علوم حساب و جبر از عدد نشأت می‌گیرند و هندسه، به مفهوم سنتی آن، علم فضا و اشکال و اجسام موجود در فضا است. بسیاری اوقات می‌توان با یک پدیده دو برخورد متمایز ریاضی، یکی جبری‌ـ عددی، و دیگری هندسی، داشت. در برخورد جبری یک چارچوب نمادین ارائه می‌شود که اغلب برای حل مسائل دیگری نیز قابل استفاده است و گاهی نیز منجر به فراهم ساختن یک الگوریتم یا دستورالعمل زنجیره‌ای برای حل این‌گونه مسائل می‌شود. در برخورد هندسی، که ریشه در نیروی باصرهٔ انسان دارد، سعی بر این است که جمیع روابط موجود بین اجزاء پدیده یکجا جمع گردند، خصوصیات برجسته شناسایی شوند، و حل مسأله از این مشاهدات دیده شود. به ذکر دو مثال ابتدایی می‌پردازیم:

مثال ۱. می‌خواهیم ثابت کنیم مجموع هر تعداد عدد فرد متوالی که از ۱ شروع شود یک مجذور کامل است. در واقع:

$$۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n - ۱) = n^۲ \qquad (۱)$$

یک روش جبری‌ـ عددی برای اثبات این ادعا، استقراء است. حکم برای $n = ۱$ صحیح است و اگر فرض کنیم (۱) برای n برقرار است، نشان می‌دهیم برای $(n + ۱)$ نیز برقرار است:

$$۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n - ۱) + (۲n + ۱) = n^۲ + (۲n + ۱) = (n + ۱)^۲$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

برخورد هندسی با همین حکم در شکل ۱ دیده می‌شود. توجه کنید که اعداد فرد به صورت لایه‌هایی از گوشهٔ چپ پایین افزوده می‌شوند و همواره یک مربع به ضلع n پدید می‌آید:

شکل ۱

مثال ۲. می‌خواهیم در مورد تعداد جواب‌های دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر بحث کنیم:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2+y^2+x+y=4 \end{cases} \tag{2}$$

نخست مسأله را از دیدگاه جبری بررسی می‌کنیم. با تفریق دو رابطه داریم $x+y=2$. اگر $y=2-x$ را در معادلهٔ اول جایگزین کنیم نتیجه می‌شود که $2x^2-4x+2=0$ یا $x^2-2x+1=0$، پس $x=1$. با جایگزینی در معادلهٔ اول داریم $y=\pm 1$ ولی فقط جواب $y=1$ در معادله دوم صدق می‌کند، پس تنها جواب مسأله $(x,y)=(1,1)$ است. یک دیدگاه هندسی برای بررسی این مسأله می‌تواند توجه به مکان هندسی دو معادله در صفحه xy باشد. دستگاه را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ (x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{9}{2} \end{cases}$$

معادله اول دایره‌ای به شعاع $\sqrt{2}$ به مرکز $(0,0)$ را نمایش می‌دهد و معادله دوم، معادله یک دایره به شعاع $\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=\frac{3}{\sqrt{2}}$ به مرکز $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. حال فاصله مرکز دایره‌ها برابر $\frac{1}{\sqrt{2}}$ است، پس تنها نقطهٔ دایرهٔ اول به فاصله $\frac{3}{\sqrt{2}}$ از مرکز دایرهٔ دوم، نقطهٔ $(1,1)$ است، که تنها جواب مسأله می‌باشد.

توجه کنید که هرچند در راه حل هندسی نیز عملیات جبری انجام شد، لیکن این عملیات در راستای هدف‌های خاص هندسی بودند که شناخت شکل مدور مکان‌های هندسی القاء می‌کرد. برای اشکال نامأنوس یا وقتی که مقایسهٔ طول شعاع‌ها و فواصل آسان نباشد، تحلیل جبری اجتناب‌ناپذیر است، ولی هرجا که دیدگاه هندسی مقدور باشد، معمولاً یک بینش یا تعبیر روشن‌کننده ایجاد می‌شود.

نکته مهم دیگر در مورد مسأله بالا این که تعداد متغیرهای مسأله در اینجا ۲ است که بررسی هندسی آن را در صفحهٔ xy ممکن می‌سازد. برای مسائل سه متغیری نیز می‌توان از تجسم هندسی

بهره جست. اما در بسیاری مسائل ریاضی و کاربردی، تعداد متغیرهای ذی دخل بیش از ۳ است که ظاهراً مانعی چاره‌ناپذیر در راه ارائه دیدگاه هندسی است زیرا که انسان به عنوان موجود سه بعدی هیچ گونه برداشت ادراکی مستقیم از ابعاد بالاتر از سه ندارد. یک هدف مهم ما در این جلسه و چند جلسهٔ آینده فراهم آوردن نوعی هندسه nـ بعدی است که در آن n به اعداد کوچکتر یا مساوی ۳ محدود نباشد. این هندسه را می‌توان یک زبان ریاضی مناسب برای تعمیم شهود هندسی به فرای ابعاد ۲ و ۳ تلقی کرد که همانند نیروی باصره در سوق دادن تفکر ریاضی به یافتن روش مناسب برای حل مسائل کارساز است. در اینجا هیچ‌گونه ادعایی برای "وجود" فیزیکی فضای nـ بعدی مطرح نیست، بلکه یک نظام دقیق ریاضی مطرح خواهد شد که بستر مناسبی برای نوعی تجسم و شهود، هرچند مجازی و نمادین، در ابعاد بالاتر از ۳ است.

رهنمود ما برای ساختن فضای nـ بعدی ارتباط جبر و هندسه در هندسهٔ تحلیلی است. دیده‌ایم که اولین ارتباط جبر و هندسه از نسبت دادن یک عدد (یعنی "طول") به پاره‌خط‌ها آغاز می‌شود، یعنی در تناظر قرار دادن نقاط یک خط راست با مجموعهٔ اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$. در هندسهٔ تحلیلی، نقاط یک صفحه با زوج‌های مرتب اعداد حقیقی، یعنی عناصر $\mathbb{R}^۲$، و نقاط فضا با سه‌تایی‌های مرتب اعداد حقیقی، یعنی عناصر $\mathbb{R}^۳$، مدرج می‌شوند. تا اینجا جبر و هندسه مستقل از یکدیگر در ذهن ما وجود دارند و هندسهٔ تحلیلی یک پل ارتباطی است. برای $n \geq ۴$، nـ تایی‌های مرتب اعداد حقیقی معنی دارند ولی هندسه‌ای فرای فضای عادی سه بعدی نمی‌شناسیم. با الهام گرفتن از ارتباط فوق برای $n \leq ۳$، مفاهیم هندسی را برای $\mathbb{R}^n$، یعنی مجموعهٔ nـ تایی‌های مرتب اعداد حقیقی، تعریف می‌کنیم. به این ترتیب نوعی هندسه در $\mathbb{R}^n$ بنا می‌شود.

با این مقدمه، $\mathbb{R}^n$، مجموعهٔ n تایی‌های مرتب اعداد حقیقی، یعنی اشیاء ریاضی $\mathbf{x} = (x_۱, \ldots, x_n)$، $x_i \in \mathbb{R}$، را در نظر می‌گیریم و هر چنین x را یک **نقطهٔ** $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم. نخست یک عمل جمع در $\mathbb{R}^n$ مشابه جمع بردارها در $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$ تعریف می‌کنیم. برای $\mathbf{x} = (x_۱, \ldots, x_n)$ و $\mathbf{y} = (y_۱, \ldots, y_n)$، $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x + y = (x_۱ + y_۱, \ldots, x_n + y_n) \tag{۳}$$

(۱—۱) خواص جمع

(۱—۱—۱) خاصیت تعویض‌پذیری (جابجایی): $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$.

(۱—۱—۲) خاصیت شرکت‌پذیری $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$.

(۱—۱—۳) عنصر بی‌اثر: n تایی $(\circ,\ldots,\circ)=\underline{\circ}$ (یگانه عنصر) دارای ویژگی زیر است:

$$x+\underline{\circ}=\underline{\circ}+x=x$$

(۱—۱—۴) عنصر قرینه: برای n تایی داده شده $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$، n تایی "$-\mathbf{x}$" که به صورت $-\mathbf{x}=(-x_1,\ldots,-x_n)$ تعریف می‌شود (یگانه عنصر) دارای ویژگی زیر است:

$$x+(-x)=(-x)+x=\underline{\circ}$$

خواص فوق همه به سادگی از تعریف نتیجه می‌شوند.

تعریف جمع n تایی‌ها و خواص بالا عیناً از حالت دو بعدی و سه بعدی برگرفته شده‌اند. اگر به نقاط $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ و $\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)$ در $\mathbb{R}^3$، بردارهای ساطع از $\underline{\circ}$ به این نقاط را منسوب کنیم، $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ مفهوم مجموع برداری معمول را دارد یعنی رأس چهارم متوازی‌الاضلاعی که سه رأس دیگر آن نقاط $\underline{\circ}$، $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ هستند.

شکل ۳

برای بردارها در صفحه و فضای سه بعدی، حاصل‌ضرب یک عدد حقیقی در بردار نیز تعریف شده است. این عمل را می‌توان در $\mathbb{R}^n$ نیز تعریف کرد. برای نقطهٔ $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ و عدد حقیقی $r\in\mathbb{R}$، نقطهٔ $r\mathbf{x}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$rx=(rx_1,\ldots,rx_n) \tag{۴}$$

یعنی همهٔ مؤلفه‌های $\mathbf{x}$ در r ضرب می‌شوند. تعبیر این عمل در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ را یادآوری می‌کنیم. اگر بردار واصل از $\underline{\circ}$ به $\mathbf{x}$ را در نظر بگیریم، $r\mathbf{x}$ برداری در همان راستاست که اگر r مثبت باشد همجهت با $\mathbf{x}$ و اگر r منفی باشد در جهت مقابل است

شکل ۴

خواص ابتدایی زیر را در مورد ضرب در اعداد و ارتباط آن با عمل جمع ثبت می‌کنیم. همهٔ این احکام نتیجهٔ سرراست تعریف هستند:

(۱—۲) خواص ضرب در اعداد

(۱—۲—۱) برای هر نقطهٔ $\mathbf{x}$، $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

(۱—۲—۲) اگر r, s اعداد حقیقی باشند و $\mathbf{x}$ یک نقطه، $(rs)\mathbf{x} = r(s\mathbf{x})$.

(۱—۲—۳) اگر r, s اعداد حقیقی باشند و $\mathbf{x}$ یک نقطه، $(r+s)\mathbf{x} = (r\mathbf{x}) + (s\mathbf{x})$.

(۱—۲—۴) اگر r عدد حقیقی باشد و $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ دو نقطه، $r(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (r\mathbf{x}) + (r\mathbf{y})$.

با این تعاریف اکنون آماده هستیم مفاهیم هندسه را در $\mathbb{R}^n$ پیاده کنیم. ساده‌ترین مفهوم هندسی پس از نقطه، "خط راست" است. برای تعریف خط راست در هندسهٔ تحلیلی دو بعدی و سه بعدی راه‌های گوناگون هست. باید تعریفی را مبنا قرار دهیم که بتوان با صرفاً مفاهیم جمع نقاط و ضرب در یک عدد حقیقی آن را بیان کرد، در این صورت چون این مفاهیم در $\mathbb{R}^n$ معنی دارند همان تعریف را می‌توان در $\mathbb{R}^n$ اتخاذ کرد. چنین تعریفی از خط راست را می‌توان در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ در نظر گرفت.

فرض کنید $\mathbf{a}$ و $\mathbf{A}$ دو نقطه در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$ باشند به طوری که $\mathbf{A} \neq \underline{0}$. $\mathbf{a}$ را به صورت یک نقطه و $\mathbf{A}$ را به صورت یک بردار (ساطع از مبدأ) تصور کنید. چون $\mathbf{A} \neq \underline{0}$ فرض شده است مضارب حقیقی $\mathbf{A}$ یک راستا تعریف می‌کنند. حال خط راستی را در نظر بگیرید که از $\mathbf{a}$ می‌گذرد و موازی این راستا است. شرط لازم و کافی برای این که یک نقطه روی این خط باشد این است که بتوان آن را به صورت $\mathbf{a} + t\mathbf{A}$، برای عدد حقیقی مناسب t، نوشت (شکل ۵).

شکل ۵

در تعریف نقاط این خط به شکل $\mathbf{a} + t\mathbf{A}$، فقط دو عمل ذکر شده، ضرب در عدد حقیقی و جمع، به‌کار رفته است پس می‌توان آن را مبنای تعریف خط راست در $\mathbb{R}^n$ قرارداد.

(۱—۳) تعریف. فرض کنید $\mathbf{a}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$، $\mathbf{A} \neq \underline{\circ}$، داده شده باشند، در این صورت مجموعهٔ زیر یک **خط راست در** $\mathbb{R}^n$ خوانده می‌شود:

$$\langle a; A\rangle = \{a + tA \mid t \in \mathbb{R}\} \qquad (۵)$$

$\langle a; A\rangle$ را به مناسبت مقدمهٔ بالا اصطلاحاً **خط راست گذرا از a به موازات A** نیز می‌نامیم هرچند که هنوز مفهوم "موازی" تعریف نشده است. بدین ترتیب هر نقطهٔ $\mathbf{x} = (x_۱, \ldots, x_n)$ از مجموعهٔ بالا باید به شکل زیر باشد:

$$\begin{aligned} x &= a + tA \\ (x_۱, \ldots, x_n) &= (a_۱, \ldots, a_n) + t(A_۱, \ldots, A_n) \\ &= (a_۱ + tA, \ldots, a_n + tA_n) \end{aligned}$$

پس برای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{A}$ داده شده، خط راست $\langle \mathbf{a}; \mathbf{A}\rangle$ متشکل از نقاط $\mathbf{x} = (x_۱, \ldots, x_n)$ به شکل زیر است:

$$\begin{cases} x_۱ = a_۱ + tA_۱ \\ \vdots \\ x_n = a_n + tA_n \end{cases} \qquad (٦)$$

که در اینجا t همهٔ مقادیر حقیقی را اتخاذ می‌کند. (٦) را **نمایش پارامتری خط راست** $\langle \mathbf{a}; \mathbf{A}\rangle$ نیز می‌نامند. توجه کنید که هر خط راست، به مفهوم تعریف شده، همان‌طور که انتظار می‌رود، در تناظر یک به یک با اعداد حقیقی است. هر نقطهٔ $\langle \mathbf{a}; \mathbf{A}\rangle$، به شکل $\mathbf{a} + t\mathbf{A}$، یعنی متناظر با t است، و این t منحصر به فرد است زیرا که اگر $\mathbf{a} + t\mathbf{A} = \mathbf{a} + t'\mathbf{A}$، با جمع کردن "$-\mathbf{a}$" با دو طرف نتیجه می‌شود که $t\mathbf{A} = t'\mathbf{A}$ و $(t - t')\mathbf{A} = \underline{\circ}$. حال چون $\mathbf{A} \neq \underline{\circ}$ فرض شده است، لزوماً $t - t' = \circ$ یا $t = t'$.

مثال (محورهای مختصات). n تایی‌های $\mathbf{e}_۱, \ldots, \mathbf{e}_n$ را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$e_۱ = (۱, \circ, \ldots, \circ) \quad , \quad e_۲ = (\circ, ۱, \circ, \ldots, \circ) \quad , \ldots , \quad e_n = (\circ, \ldots, \circ, ۱)$$

بدین ترتیب $\mathbf{e}_i$ آن n تایی است که مؤلفه i ام آن ۱ و سایر مؤلفه‌هایش صفر است. حال

$$\langle \underline{\circ}; e_i\rangle = \{(\circ, \ldots, \circ, t, \circ, \ldots, \circ) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

یک خط راست است که **محور مختصاتی** iــ**ام** یا **محور** x_i خوانده می‌شود. تعداد محورهای مختصات در $\mathbb{R}^n$ برابر n است.

اگر $l = \langle \mathbf{a}; \mathbf{A} \rangle$ یک خط راست باشد، خط راست $\langle \underline{\circ}; \mathbf{A} \rangle$ را **انتقال یافتهٔ** l **به مبدأ** می‌نامیم و با نمادهای l° یا $\langle \mathbf{A} \rangle$ نیز نمایش می‌دهیم. داریم

$$l^\circ = \langle A \rangle = \{tA \mid t \in \mathbb{R}\}$$

(۱ــ۴) گزاره. برای هر $\mathbf{B} \in l^\circ$ که $\mathbf{B} \neq \underline{\circ}$ و هر $\mathbf{b} \in l$ داریم:

$$\langle b; B \rangle = \langle a; A \rangle$$

اثبات. اگر $\mathbf{B} \in l^\circ$ ،$\mathbf{B} \neq \underline{\circ}$ داریم $\mathbf{B} = t_\circ \mathbf{A}$ برای عدد حقیقی مناسب $t_\circ \neq \circ$، و اگر $\mathbf{b} \in l$، $\mathbf{b} = \mathbf{a} + t_1 \mathbf{A}$ برای عدد حقیقی مناسب t_1، پس برای هر عنصر $\mathbf{b} + s\mathbf{B}$، $s \in \mathbb{R}$، در $\langle \mathbf{b}; \mathbf{B} \rangle$ داریم:

$$b + sB = a + t_1 A + s(t_\circ A) = a + (t_1 + st_\circ)A$$

پس $\langle \mathbf{b}; \mathbf{B} \rangle \subset \langle \mathbf{a}; \mathbf{A} \rangle$. بالعکس اگر نقطه‌ای $\mathbf{a} + t\mathbf{A}$ در نظر بگیریم، می‌توان $t_1 + st_\circ = t$ را برای s حل کرد چون فرض کرده‌ایم $t_\circ \neq \circ$ و هر نقطهٔ $\langle \mathbf{a}; \mathbf{A} \rangle$ به $\langle \mathbf{b}; \mathbf{B} \rangle$ متعلق است. پس $\langle \mathbf{b}; \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{a}; \mathbf{A} \rangle$. □

حال این سؤال را مطرح می‌کنیم که مفهوم "خط راست" به صورتی که تعریف شد تا چه حد به خط راستی که در فضای مأنوس سه بعدی می‌شناسیم نزدیک است؟ از آنجا که خط راست در $\mathbb{R}^n$ در واقع انتقال یافتهٔ همهٔ مضارب حقیقی یک $\mathbf{A}$ ثابت به وسیلهٔ یک بردار ثابت $\mathbf{a}$ است، انتظار داریم همان خواص اساسی برقرار باشند. به عنوان نمونه یک انتظار ابتدایی را ثابت می‌کنیم:

(۱ــ۵) گزاره. دو خط راست که دو نقطهٔ مشترک متمایز داشته باشند بر هم منطبقند.

اثبات. فرض کنید $\langle \mathbf{a};\mathbf{A}\rangle$ و $\langle \mathbf{b};\mathbf{B}\rangle$ دو خط راست باشند، و $\mathbf{P}\neq\mathbf{Q}$ دو نقطه که متعلق به هر دو خط است. طبق (۱—۴) $\langle \mathbf{a};\mathbf{A}\rangle=\langle \mathbf{P};\mathbf{A}\rangle$ و $\langle \mathbf{b};\mathbf{B}\rangle=\langle \mathbf{P};\mathbf{B}\rangle$ چون $\mathbf{P}$ روی هر دو خط قرار دارد، پس:

$$Q=P+tA \quad \text{برای } t\in\mathbb{R} \text{ مناسب}$$

$$Q=P+sB \quad \text{برای } s\in\mathbb{R} \text{ مناسب}$$

پس $t\mathbf{A}=s\mathbf{B}$. ضمناً $s\neq 0$ و $t\neq 0$ زیرا که فرض کرده‌ایم $\mathbf{P}\neq\mathbf{Q}$. بنابراین از $t\mathbf{A}=s\mathbf{B}$ نتیجه می‌گیریم که $\mathbf{B}$ مضربی ناصفر از $\mathbf{A}$ است. طبق (۱—۴) خط راست $\langle \mathbf{a};\mathbf{A}\rangle=\langle \mathbf{P};\mathbf{A}\rangle$ برابر می‌شود با $\langle \mathbf{P};\mathbf{B}\rangle$ که همان $\langle \mathbf{b},\mathbf{B}\rangle$ است و حکم به اثبات می‌رسد. □

دو خط راست l_1,l_2 را موازی می‌نامیم در صورتی که نقطهٔ مشترک نداشته باشند و انتقال یافته آنها به مبدأ یکی باشد، $l_1^\circ=l_2^\circ$. بنابراین برای هر خط l که از $\underline{\circ}$ نگذرد، l موازی l° است. توازی دو خط l_1,l_2 را به $l_1\|l_2$ نمایش می‌دهیم.

نمایش دیگری برای خطوط راست **نمایش متقارن** است که بدین صورت به‌دست می‌آید. اگر هر یک از روابط (٦) را برای t حل کرده نتایج را برابر قرار دهیم، حاصل می‌شود:

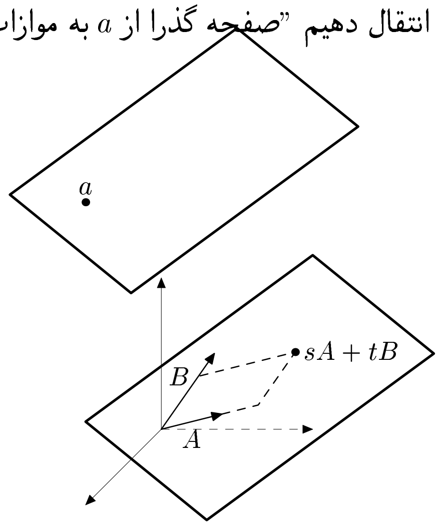
$$\frac{x_1-a_1}{A_1}=\frac{x_2-a_2}{A_2}=\cdots=\frac{x_n-a_n}{A_n} \qquad (۷)$$

از آنجا که فرض شده است $\mathbf{A}\neq\underline{\circ}$، همهٔ A_i ها نمی‌توانند صفر شوند. صفر شدن بعضی A_i ها در (۷) به منزلهٔ تقسیم بر صفر نیست، بلکه اگر به (٦) نگاه کنیم می‌بینیم که $A_i=0$ به معنی این است که x_i ثابت و همواره برابر a_i می‌باشد.

مثال. فرض کنید $A_1\neq 0$ و $A_2=\cdots=A_n=0$. در این صورت $\mathbf{A}=(A,0,\ldots,0)$، یعنی $\mathbf{A}$ متعلق به محور x_1 است. نتیجه این که خط راست $\langle \mathbf{a};\mathbf{A}\rangle$ یا موازی محور x_1 است یا خود آن است. به همین ترتیب اگر $A_j\neq 0$ و سایر A_i ها صفر باشند، خط $\langle \mathbf{a};\mathbf{A}\rangle$ موازی محور x_j یا منطبق بر آن خواهد بود.

زیرفضاهای مستوی (۱)

در جلسه قبل مفهوم نقطه و خط راست را که ابتدایی‌ترین مفاهیم هندسه‌اند در $\mathbb{R}^n$ در نظر گرفتیم. گام بعدی ما تعریف یک "صفحه راست" (یا به طور خلاصه "صفحه") در $\mathbb{R}^n$ است ($n \geq 2$). یادآوری می‌کنیم که "خط گذرا از a به موازات A"، $A \neq \underline{0}$، این گونه تعریف شد که نخست مضارب حقیقی A را در نظر گرفتیم، که یک "خط گذرا از $\underline{0}$ در راستای A" تشکیل می‌دهند، و سپس با انتقال این خط با مقدار ثابت a، "خط گذرا از a به موازات A" به‌دست آمد. برای تعریف صفحه به طریق مشابه عمل می‌کنیم. فرض کنید A, B دو n تایی ناهمراستا باشند یعنی هیچ‌یک مضرب حقیقی دیگری نباشد. نخست مجموعهٔ نقاط به شکل $sA + tB$ را در نظر می‌گیریم. تصور شهودی ما از این مجموعه، صفحهٔ گذرا از مبدأ و شامل نقاط A و B است. توجه کنید که به‌ازای $s = t = 0$، مبدأ به‌دست می‌آید، به‌ازای $t = 0$، $s = 1$، نقطهٔ A و به‌ازای $t = 1$، $s = 0$، نقطهٔ B. حال اگر نقطه‌ای a در نظر بگیریم و همه نقاط این مجموعه را به اندازهٔ a انتقال دهیم "صفحه گذرا از a به موازات A و B" حاصل می‌شود.



بدین ترتیب تعریف می‌کنیم

$$\langle a; A, B\rangle = \{a + sA + tB \mid s, t \in \mathbb{R}\} \tag{۱}$$

این مجموعه را *صفحهٔ گذرا از a به موازات A و B* می‌نامیم.

مثال ۱ (صفحات مختصاتی). در $\{۱, \ldots, n\}$ به تعداد $\frac{n(n-۱)}{۲} = \binom{n}{۲}$ زوج اندیس $\{i, j\}$، $\{i, j\}$، $i \neq j$، وجود دارد. به‌ازای هر $\{i, j\}$ مجموعهٔ

$$\{se_i + te_j \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

یک *صفحهٔ مختصاتی* در $\mathbb{R}^n$ است.

اگر E یک صفحه در $\mathbb{R}^n$ باشد، $E = \langle a; A, B\rangle$، E° یا انتقال‌یافتهٔ E به مبدأ را به صورت

$$E^\circ = \langle \underline{\circ}; A, B\rangle$$

تعریف می‌کنیم. گاهی به جای $\langle \underline{\circ}; A, B\rangle$ می‌نویسیم $\langle A, B\rangle$. اگر $E_۱$ و $E_۲$ هر یک خط یا صفحه باشد، $E_۱$ و $E_۲$ را *موازی* می‌نامیم و می‌نویسیم $E_۱ \| E_۲$ مشروط بر این که اشتراک $E_۱$ و $E_۲$ تهی باشد و به علاوه:

$$E_۱ \subset E_۲ \quad \text{یا} \quad E_۲ \subset E_۱$$

مثال ۲. اگر E یک صفحه در $\mathbb{R}^n$ باشد و $\underline{\circ} \notin E$. نشان می‌دهیم $E \| E^\circ$. باید نشان دهیم E و E° نقطهٔ مشترک ندارند. فرض کنید $E = \langle a; A, B\rangle$، پس $E^\circ = \langle \underline{\circ}; A, B\rangle$. اگر نقطهٔ مشترکی وجود داشته باشد، مثلاً P، آنگاه $P = a + s_۱A + t_۱B$ برای $s_۱$ و $t_۱$ مناسب، و نیز $P = s_۲A + t_۲B$ برای $s_۲$ و $t_۲$ مناسب، پس $a + s_۱A + t_۱B = s_۲A + t_۲B$، یا

$$a = (s_۲ - s_۱)A + (t_۲ - t_۱)B \tag{۲}$$

در نتیجه می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \underline{0} &= (s_2 - s_1)A + (t_2 - t_1)B + (s_1 - s_2)A + (t_1 - t_2)B \\ &= a + (s_1 - s_2)A + (t_1 - t_2)B \end{aligned}$$

یعنی $\underline{0} \in E$ که خلاف فرض است.

مثال ۳. اگر $E = \langle a; A, B \rangle$ یک صفحه باشد، $b \notin E$، و $L = \langle b; B \rangle$، آنگاه خط L با صفحهٔ E موازی است زیرا که اولاً $L^\circ = \langle \underline{0}; B \rangle \subset \langle \underline{0}; A, B \rangle = E^\circ$ ، و ثانیاً نشان می‌دهیم L و E نقطهٔ مشترک ندارند. فرض کنید P یک نقطهٔ مشترک باشد، پس $P = b + tB$ و نیز $P = a + s_1 A + t_1 B$، بنابراین

$$b + tB = a + s_1 A + t_1 B$$

$$b = a + s_1 A + (t_1 - t)B$$

یعنی $b \in E$ که خلاف فرض است.

مثال ۴. در $\mathbb{R}^3$، اگر دو صفحه نقطه مشترک نداشته باشند، لزوماً موازی‌اند. این وضعیت در $\mathbb{R}^n$، برای $n \geq 4$، لزوماً حاکم نیست، یعنی دو صفحهٔ فاقد نقطهٔ مشترک ممکن است موازی نباشند! مثال زیر را در $\mathbb{R}^4$ در نظر بگیرید:

$$E_1 = \langle \underline{0}; e_1, e_2 \rangle \quad , \quad E_2 = \langle e_4; e_1, e_3 \rangle$$

E_1 متشکل از نقاط به شکل $(s, t, 0, 0)$ است و E_2 متشکل از نقاط به صورت $(s', 0, t', 1)$. بدیهی است که E_1 و E_2 نقطهٔ مشترک ندارند زیرا که مؤلفه چهارم هر عنصر E_1 صفر است و مؤلفه چهارم هر عنصر E_2 برابر ۱ می‌باشد. حال اگر E_1 و E_2 را به مبدأ منتقل کنیم، داریم

$$E_1^\circ = E_1 = \{(s, t, 0, 0) \mid s, t \in \mathbb{R}\} \quad , \quad E_2^\circ = \{(s', 0, t', 0) \mid s', t' \in \mathbb{R}\}$$

که نه E_1° زیرمجموعهٔ E_2° است و نه بالعکس، پس E_1 و E_2 در تعریف توازی صدق نمی‌کنند. دو صفحه در $\mathbb{R}^n$، $n \geq 4$، را که نه نقطهٔ مشترک داشته باشند و نه موازی باشند، دو صفحه متنافر می‌نامیم.

در اینجا می‌توان گزاره‌هایی مشابه گزاره‌های (۱—۴) و (۱—۵) جلسهٔ قبل ثابت کرد به این مضمون که:

۱) اگر $E = \langle a; A, B\rangle$، C و D دو عنصر ناهمراستای E° باشند و $b \in E$، آنگاه $E = \langle b; C, D\rangle$.

۲) اگر P, Q, R سه نقطهٔ متمایز و ناهمراستای مشترک بین دو صفحه $E_۱$ و $E_۲$ باشند، آنگاه $E_۱ = E_۲$.

چون به زودی احکام کلی‌تری ثابت خواهیم کرد در حال حاضر اثبات این دو حکم را به دانشجویان واگذار می‌کنیم و به معرفی مفاهیم جدیدی فرای خط و صفحه می‌پردازیم. تصور ذهنی ما از خط و صفحه، اشکال مسطح "یک بعدی" و "دو بعدی" است. هنوز تعریفی دقیق از کلمه "بعد" ارائه نکرده‌ایم و لیکن می‌دانیم که نقاط خط با یک پارامتر t در مجموعه $\{a + tA \mid t \in \mathbb{R}\}$ مدرج می‌شوند و نقاط یک صفحه با دو پارامتر s, t در مجموعهٔ $\{a + sA + tB \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. به طور شهودی می‌توان تعداد پارامترهای حقیقی مستقل لازم برای تمیز دادن نقاط یک مجموعه را "بعد" آن مجموعه تلقی کرد. این مفهوم را به طور دقیق‌تر ضمن معرفی "زیرفضاهای مستوی kـ بعدی در $\mathbb{R}^n$"، $k \leq n$، که تعمیم خط و صفحه به عنوان "اشیاء مسطح kـ بعدی" خواهند بود، بررسی خواهیم کرد.

فرض کنید می‌خواهیم در $\mathbb{R}^n$، $n \geq ۳$، تعریفی برای اشیاء سه‌بعدی مسطح مشابه خط و صفحهٔ دوبعدی تعریف کنیم. طبیعی است که نخست مجموع‌های به شکل $rA + sB + tC$، r, s, t اعداد حقیقی را در نظر بگیریم که در آن A، B و C سه n تایی هستند. سپس اگر $a \in \mathbb{R}^n$ داده شده باشد، مجموعه انتقال یافته، یعنی $\{a + rA + sB + tC | r, s, t \in \mathbb{R}\}$ را "یک زیرفضای سه‌بعدی" در $\mathbb{R}^n$ تلقی کنیم. نکتهٔ قابل توجه این که در مورد خط راست فرض کردیم $A \neq \underline{\circ}$ که در غیر این صورت مجموعهٔ $\{a + tA \mid t \in \mathbb{R}\}$ به یک تک نقطهٔ $\{a\}$ مبدل می‌شود. همین‌طور در مورد صفحه، فرض ناهمراستا بودن A و B را اعمال کردیم که در غیر این صورت مجموعهٔ $\{a + sA + tB \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ به یک خط راست یا حتی یک نقطه (وقتی $A = B = \underline{\circ}$) مبدل می‌شود. حال می‌خواهیم شرطی مناسب برای سه n تایی (یا حتی به طور کلی k، n تایی) بیابیم که تعمیم طبیعی صفر نبودن A در $\{A\}$ و ناهمراستا بودن A و B در $\{A, B\}$ باشد.

(۲—۱) تعریف. فرض کنید $\mathbf{A}_۱, \ldots, \mathbf{A}_k$ عناصر $\mathbb{R}^n$ باشند. مجموعهٔ $\{\mathbf{A}_۱, \ldots, \mathbf{A}_k\}$ را مستقل خطی می‌نامیم در صورتی که هیچ مجموع مضارب حقیقی $\mathbf{A}_۱, \ldots, \mathbf{A}_k$، یعنی $t_۱\mathbf{A}_۱ + \cdots + t_k\mathbf{A}_k$، صفر نشود مگر این که همه ضرایب $t_۱, \ldots, t_k$ صفر باشند.

اگر مجموعهٔ $\{\mathbf{A}_۱, \ldots, \mathbf{A}_k\}$ مستقل خطی نباشند، آن را وابستهٔ خطی می‌نامیم. هر مجموع به شکل $t_۱\mathbf{A}_۱ + \cdots + t_k\mathbf{A}_k$ یک ترکیب خطی $\mathbf{A}_۱, \ldots, \mathbf{A}_k$ خوانده می‌شود.

مثال ۱. برای $k = ۱$، مجموعه $\{A\}$ وابستهٔ خطی خواهد بود به شرطی که $tA = \underline{\circ}$ بتواند برقرار باشد بدون این که $t = \circ$. این تنها وقتی میسر است که $A = \underline{\circ}$. پس شرط اعمال شده برای تعریف خط راست $\langle a; A\rangle$ روی A (یعنی $A \neq \underline{\circ}$) معادل این است که $\{A\}$ مستقل خطی است.

مثال ۲. برای $k = ۲$، وابستگی خطی مجموعهٔ دو عنصری $\{A, B\}$ معادل این است که $t_۱A + t_۲B = \underline{\circ}$ بدون این که هردوی $t_۱$ و $t_۲$ صفر شوند. مثلاً اگر $t_۱ \neq \circ$، آنگاه $A = -\frac{t_۲}{t_۱}B$، یعنی A مضربی حقیقی از B خواهد شد. بدین ترتیب در تعریف صفحه $\langle a; A, B\rangle$ شرط همراستا نبودن A و B را می‌توان بدین صورت بیان کرد که $\{A, B\}$ مستقل خطی است.

مثال ۳. اگر در مجموعهٔ $\{A_۱, \ldots, A_k\}$، یک یا بیشتر از A_i ها nـ تایی صفر، $\underline{\circ}$، باشد، مجموعه، وابسته خطی می‌شود. مثلاً فرض کنید $A_j = \circ$. ضرایب t_i را این طور در نظر بگیرید:

$$t_i = \begin{cases} ۱ & i = j \\ \circ & i \neq j \end{cases}$$

در این صورت $t_۱A_۱ + \cdots + t_kA_k = \underline{\circ}$ بدون این که همهٔ A_i ها صفر باشند.

(۲—۲) گزاره. شرطی لازم و کافی برای وابستگی خطی $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ بدین شرح است:

الف) در حالت $k = ۱$، $\{A_۱\}$ وابستهٔ خطی است اگر و تنها اگر $A_۱ = \underline{\circ}$.

ب) در حالت $k > ۱$، $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ وابسته خطی است اگر و تنها اگر بتوان یکی از A_i ها را به صورت ترکیبی خطی از سایر A_i ها نوشت.

اثبات. حالت $k=۱$ در مثال ۱ بالا بررسی شد، فرض کنید $k \geq ۲$. اگر $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ وابستهٔ خطی باشد، $t_۱, \ldots, t_k$ حقیقی وجود دارند، نه همه صفر، که $t_۱A_۱ + \cdots + t_kA_k = \underline{\circ}$. مثلاً $t_j \neq \circ$. در این صورت

$$A_j = -\frac{t_۱}{t_j}A_۱ - \cdots - \frac{t_{j-۱}}{t_j}A_{j-۱} - \frac{t_{j+۱}}{t_j}A_{j+۱} - \cdots - \frac{t_n}{t_j}A_n$$

یعنی A_j ترکیبی خطی از سایر A_i ها است.

بالعکس اگر داشته باشیم:

$$A_j = c_۱A_۱ + \cdots + c_{j-۱}A_{j-۱} + c_{j+۱}A_{j+۱} + \cdots + c_kA_k$$

با انتقال A_j به طرف دیگر رابطه داریم

$$c_۱A_۱ + \cdots + c_{j-۱}A_{j-۱} - A_j + c_{j+۱}A_{j+۱} + \cdots + c_kA_k = \underline{\circ}$$

و این در حالی است که دست کم یکی از ضرایب (ضریب A_j) صفر نیست. □

با این مقدمه، زیرفضاهای با بعد بالاتر از ۱ و ۲ در $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود. فرض کنید $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی از عناصر $\mathbb{R}^n$ باشد و $a \in \mathbb{R}^n$ یک نقطهٔ داده شده، در این صورت مجموعهٔ زیر یک زیرفضای مستوی kـ بعدی ("زیرفضای مستوی kـ بعدی گذرا از a به موازات $A_۱, \ldots, A_k$") خوانده می‌شود:

$$\langle a; A_۱, \ldots, A_k \rangle = \{a + t_۱A_۱ + \cdots + t_kA_k \mid t_۱, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\} \qquad (۳)$$

اگر مجموعهٔ تعریف شده در (۳) را به E نمایش دهیم، مقصود از E° (انتقال‌یافتهٔ E به $\underline{\circ}$)، مجموعهٔ $\langle A_۱, \ldots, A_k \rangle = \langle \underline{\circ}, A_۱, \ldots, A_k \rangle$ است. به طور کلی یک زیرفضای مستوی kـ بعدی که شامل $\underline{\circ}$ باشد یک زیرفضای خطی خوانده می‌شود. طبق قرارداد، تنها زیرفضای صفر بعدی تک عنصری $\{\underline{\circ}\}$ است، و بدین ترتیب زیرفضاهای مستوی صفربعدی تک عنصری‌های $\{a\}$ هستند، $a \in \mathbb{R}^n$، که

از انتقال $\underline{\circ}$ به a به‌دست می‌آیند. بدین ترتیب جدول زیر را داریم:

زیرفضای مستوی صفربعدی $\longleftrightarrow$ نقطه

زیرفضای مستوی یک‌بعدی $\longleftrightarrow$ خ

زیرفضای مستوی دوبعدی $\longleftrightarrow$ صفحه

$\vdots$

تعریف زیرفضای kـ بعدی جای تأمل دارد. سؤال‌های متعددی می‌توان این مقطع مطرح کرد. آیا عدد k به طور منحصر به فرد تعیین می‌شود، یعنی اگر $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ و $\{B_۱, \ldots, B_l\}$ دو مجموعه، هر یک مستقل‌خطی، باشند، آیا می‌توان رابطه‌ای به شکل $\langle a; A_۱, \ldots, A_k\rangle = \langle b; A_۱, \ldots, A_k\rangle$، برای a و b مناسب، برقرار ساخت بدون این که $k = l$؟ به چه اعتباری زیرمجموعه‌های $\langle a; A_۱, \ldots, A_k\rangle$ را "مسطح" تجسم می‌کنیم؟ همان طور که دو خط راست دارای دو نقطهٔ متمایز مشترک بر هم منطبق می‌شوند، آیا دو زیرفضای مستوی kـ بعدی با $(k + ۱)$ نقطهٔ مشترک، لزوماً بر هم منطبق‌اند؟ در باقیمانده این جلسه و جلسهٔ بعد به جواب‌های قاطعی در مورد این گونه سؤال‌ها خواهیم رسید.

(۲ـ۳) گزاره. فرض کنید $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ مستقل خطی ست و $a \in \mathbb{R}^n$، در این صورت نمایش عناصر $\langle a; A_۱, \ldots, A_k\rangle$ به شکل $a + t_۱A_۱ + \cdots + t_kA_k$ منحصر به فرد است.

اثبات. توجه کنید که هر عنصر $\langle a; A_۱, \ldots, A_k\rangle$ طبق تعریف به شکل $a + t_۱A_۱ + \cdots + t_kA_k$ برای $t_۱, \ldots, t_k$ مناسب است. می‌خواهیم ثابت کنیم $t_۱, \ldots, t_k$ به طور یگانه تعیین می‌شوند. فرض کنید:

$$a + t_۱A_۱ + \cdots + t_kA_k = a + t'_۱A_۱ + \cdots + t'_kA_k$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که $\underline{\circ} = (t_۱ - t'_۱)A + \cdots + (t_k - t'_k)A_k$. از آنجا که $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ مستقل خطی است نتیجه می‌شود که همهٔ ضرایب صفر هستند، پس $t'_i = t_i$ برای $i = ۱, \ldots, k$، و یگانگی ضرایب به اثبات می‌رسد. $\square$

گزارهٔ فوق نشان می‌دهد هر زیرفضای مستوی kـ بعدی در تناظر یک به یک با مجموعهٔ kـ تایی‌های مرتب $(t_۱, \ldots, t_k)$، یعنی مجموعهٔ $\mathbb{R}^k$، قرار می‌گیرد، همان طور که خط راست با $\mathbb{R}$ و

صفحه با $\mathbb{R}^۲$ مدرج می‌شود.

نکته زیر نیز در مورد مفهوم استقلال خطی مکرراً مورد استفاده قرار خواهد گرفت:

(۲—۴) گزاره. اگر مجموعهٔ $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ مستقل خطی باشد، هر زیرمجموعهٔ ناتهی آن نیز مستقل خطی است. اگر $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ وابستهٔ خطی باشد، هر مجموعهٔ شامل آن نیز وابستهٔ خطی است.

اثبات. اگر زیرمجموعه‌ای از $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ وابستهٔ خطی شود، یک ترکیب خطی از اعضای آن زیرمجموعه برابر صفر می‌شود بدون آن که همهٔ ضرایب صفر باشند. اگر سایر A_i ها را با ضریب صفر به این رابطه بیافزاییم یک رابطهٔ وابستهٔ خطی برای $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ به‌دست می‌آید. همین طور اگر یک رابطهٔ وابستگی خطی برای $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ موجود باشد، همین رابطه، وابستگی خطی برای هر مجموعهٔ شامل $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ را نشان می‌دهد. □

زیرفضاهای مستوی (۲)

در پایان جلسه قبل به تعدادی سؤال بنیادی در مورد تعریف زیرفضای مستوی kـ بعدی اشاره کردیم که قرار شد به پاسخگویی کامل آنها اقدام کنیم. قضیهٔ زیر و روش اثبات آن کلید این بحث است.

(۳—۱) قضیهٔ تبادل. فرض کنید $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ و $\{B_۱, \ldots, B_l\}$ دو زیرمجموعهٔ مستقل خطی از عناصر $\mathbb{R}^n$ باشند به طوری که $\langle B_۱, \ldots, B_l\rangle = \langle A_۱, \ldots, A_k\rangle$، در این صورت $l = k$.

اثبات. نشان می‌دهیم $l \neq k$ منجر به تناقض می‌شود. مثلاً فرض کنید $k \leq l$. چون $B_۱ \in \langle B_۱, \ldots, B_l\rangle = \langle A_۱, \ldots, A_k\rangle$، می‌توان نوشت:

$$B_۱ = t_۱ A_۱ + \cdots + t_k A_k \qquad (۱)$$

دست کم یکی از ضرایب $t_۱, \ldots, t_n$ باید ناصفر باشد چه در غیر این صورت $B_۱ = \underline{o}$ و مجموعهٔ $\{B_۱, \ldots, B_l\}$ نمی‌تواند مستقل خطی باشد. مثلاً فرض می‌کنیم $t_۱ \neq ۰$ (در صورت لزوم اندیس‌ها را تعویض کنید به طوری که ضریب با اندیس ۱ ناصفر باشد)، پس با تبادل جای $B_۱$ و $t_۱ A_۱$ در دو طرف (۱) داریم:

$$\begin{aligned} -t_۱ A_۱ &= -B_۱ + t_۲ + \cdots + t_k A_k \\ A_۱ &= \tfrac{۱}{t_۱} B_۱ - \tfrac{t_۲}{t_۱} A_۲ - \cdots - \tfrac{t_k}{t_۱} A_k \end{aligned} \qquad (۲)$$

از (۲) نتیجه می‌شود که هر ترکیب خطی $A_۱, \ldots, A_k$، یعنی هر عنصر $\langle A_۱, \ldots, A_k\rangle$، ترکیبی خطی از $\{B_۱, A_۲, \ldots, A_k\}$ است. حال عنصر $B_۲ \in \langle B_۱, \ldots, B_l\rangle = \langle A_۱, \ldots, A_k\rangle$ را در نظر می‌گیریم.

چون ثابت کرده‌ایم هر عنصر $\langle A_۱, \ldots, A_k\rangle$ ترکیبی خطی از $\{B_۱, A_۲, \ldots, A_k\}$ است، می‌توان نوشت:

$$B_۲ = s_۱ B_۱ + s_۲ A_۲ + \cdots + s_k A_k \qquad (۳)$$

در اینجا همهٔ ضرایب $s_۲, \ldots, s_k$ نمی‌توانند صفر باشند زیرا در این صورت $B_۲ = s_۱ B_۱$ و مجموعه $\{B_۱, \ldots, B_l\}$ وابسته خطی خواهد شد که خلاف فرض قضیه است. پس دست کم یکی از $s_۲, \ldots, s_k$ صفر نیست که مثلاً (با تعویض نام اندیس‌ها در صورت لزوم) فرض می‌کنیم $s_۲ \neq ۰$. پس مجدداً با تبادل مکان $B_۲$ و $s_۲ A_۲$ داریم:

$$\begin{aligned} -s_۲ A_۲ &= -s_۱ B_۱ - B_۲ + s_۳ A_۳ + \cdots + t_k A_k \\ A_۲ &= -\tfrac{s_۱}{s_۲} B_۱ - \tfrac{۱}{s_۲} B_۲ - \tfrac{s_۳}{s_۲} A_۳ - \cdots - \tfrac{s_k}{s_۲} A_k \end{aligned} \qquad (۴)$$

این رابطه نشان می‌دهد که هر ترکیب خطی $B_۱, A_۲, \ldots, A_k$ (در نتیجه هر ترکیب خطی $A_۱, \ldots, A_k$) ترکیبی خطی از $\{B_۱, B_۲, A_۳, \ldots, A_k\}$ است. به همین روش ادامه داده، تک تک A_i ها را با B_i ها مبادله می‌کنیم. از آنجا که $k \leq l$، پس از k مرحله به این نتیجه می‌رسیم که هر ترکیب خطی $A_۱, \ldots, A_k$ یک ترکیب خطی $B_۱, \ldots, B_k$ است. از آنجا که $\langle A_۱, \ldots, A_k\rangle = \langle B_۱, \ldots, B_l\rangle$، اگر l اکیداً بزرگتر از k باشد، $B_{k+۱}$ باید ترکیبی خطی از $B_۱, \ldots, B_k$ باشد که این خلاف استقلال خطی $\{B_۱, \ldots, B_l\}$ است. نتیجه این که $l = k$ و حکم به اثبات می‌رسد. □

قضیه تبادل نشان می‌دهد که اگر یک زیرفضای خطی $E^°$ متشکل از ترکیب‌های خطی یک مجموعهٔ مستقل خطی $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ باشد، هر مجموعهٔ مستقل خطی دیگر که ترکیب‌های خطی عناصر آن همین مجموعه را ایجاد کند باید دارای دقیقاً k عضو باشد. بدین ترتیب عدد k، که از این پس بعد زیرفضای خطی $\langle A_۱, \ldots, A_k\rangle$ خوانده خواهد شد عددی است که به طور ذاتی بر این زیرفضای خطی تحمیل می‌شود. هر زیرمجموعهٔ مستقل خطی kـ عضوی $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ از عناصر $E^°$ را یک پایه برای E می‌نامیم. اگر زیرفضای مستوی $E = \langle a; A_۱, \ldots, A_k\rangle$ از انتقال زیرفضای

خطی $\langle A_1, \ldots, A_k \rangle$ به‌دست آمده باشد، بعد E را نیز k می‌گیریم. اکنون می‌توانیم گزاره‌ای مشابه (۱—۴) در حالت کلی ارائه کنیم:

(۳—۲) گزاره. اگر $\{A_1, \ldots, A_k\}$ مستقل خطی باشد $E = \langle a; A_1, \ldots, A_k \rangle$، $\{B_1, \ldots, B_k\}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی از عناصر $E^\circ = \langle A_1, \ldots, A_k \rangle$ باشد، و $b \in E$، آنگاه $E = \langle b; B_1, \ldots, B_k \rangle$.

اثبات. چون $b \in E$، داریم

$$b = a + t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k \qquad (۵)$$

برای اعداد حقیقی مناسب $t_1, \ldots, t_k$. از طرفی دیگر دیدیم که هر ترکیب خطی $\{A_1, \ldots, A_k\}$ یک ترکیب خطی $\{B_1, \ldots, B_k\}$ است، و بالعکس. این امر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} x &= a + s_1 A_1 + \cdots + s_k A_k \\ &= b + (s_1 - t_1) A_1 + \cdots + (s_k - t_k) A_k \quad (\text{طبق } ۵) \end{aligned} \qquad (٦)$$

و طبق (٦) می‌توان $(s_1 - t_1) A_1 + \cdots + (s_k - t_k) A_k$ را به صورت ترکیبی خطی از $B_1, \ldots, B_k$ نوشت، پس $\mathbf{x} \in \langle b; B_1, \ldots, B_k \rangle$. **بالعکس** اگر $y \in \langle b; B_1, \ldots, B_k \rangle$، آنگاه:

$$y = b + r'_1 B_1 + \cdots + r'_k B_k \qquad \text{برای اعداد حقیقی مناسب } r'_1, \ldots, r'_k$$

ترکیب خطی $r'_1 B_1 + \cdots r'_k B_k$ را می‌توان طبق (٦) به صورت $r_1 A_1 + \cdots + r_k A_k$ نوشت، پس به کمک (۵):

$$y = a + (t_1 + r_1) A_1 + \cdots + (t_k + r_k) A_k$$

یعنی $y \in \langle a; A_1, \ldots, A_k \rangle$، و حکم به اثبات می‌رسد. □

گزاره زیر نیز مشابه (۱—۵) است:

(۳—۳) گزاره. اگر زیرفضاهای مستوی kـ بعدی E_1, E_2 در $\mathbb{R}^n$ دارای $(k+1)$ نقطهٔ مشترک باشند که در یک زیرفضای با بعد کوچکتر از k در $\mathbb{R}^k$ قرار نمی‌گیرند، آنگاه $E_1 = E_2$.

اثبات. فرض کنید $P_0, P_1, \dots, P_k$ نقاط مشترک E_1, E_2 باشند. اگر $\{A_1, \dots, A_k\}$ یک پایه برای E_1° باشد، عناصر E_1 را می‌توان به صورت

$$P_0 + t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k$$

نمایش داد. حال چون $P_1, \dots, P_k \in E$، هر یک به صورت فوق نوشته می‌شود، پس $P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0$ هر یک ترکیبی خطی از $A_1, \dots, A_k$ است. می‌نویسیم $P_1' = P_1 - P_0, \dots P_k' = P_k - P_0$. حال ادعا می‌کنیم $\{P_1', \dots, P_k'\}$ مستقل خطی است. نشان می‌دهیم فرض وابستگی خطی $\{P_1', \dots, P_k'\}$ منجر به تناقض با این فرض گزاره می‌شود که $P_0, P_1, \dots, P_k$ در یک زیرفضای با بعد کوچکتر از k جای نمی‌گیرند. اگر $k = 1$ که در حالت گزاره (۱—۵) هستیم که قبلاً ثابت شده است، پس فرض می‌کنیم $k > 1$. حال فرض کنید $\{P_1', \dots, P_k'\}$ وابستهٔ خطی است. دست کم یکی از $P_1', \dots, P_k'$ ناصفر است زیرا اگر همهٔ اینها صفر باشند داریم $P_0 = P_1 = \cdots = P_k$ پس $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$ در یک زیرفضای مستوی صفر بعدی $\mathbb{R}^n$ قرار می‌گیرد که خلاف فرض است. بدین ترتیب $\{P_1', \dots, P_k'\}$ دارای حداقل یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی است (یک تک عنصری ناصفر). بزرگترین زیرمجموعه (از نظر تعداد اعضا) از $\{P_1', \dots, P_k'\}$ را در نظر می‌گیریم که مستقل خطی است، تعداد اعضای آن را l می‌نامیم. چنین زیرمجموعهٔ $\{P_1', \dots, P_k'\}$ ممکن است منحصر به فرد نباشد و لیکن به هر حال $l < k$ زیرا $\{P_1', \dots, P_k'\}$ وابستهٔ خطی فرض شده است. با تعویض نام اندیس‌ها در صورت لزوم، فرض می‌کنیم $\{P_1', \dots, P_l'\}$ این زیرمجموعهٔ مستقل خطی (دارای بیشترین تعداد ممکن عضو) باشد. زیرفضای خطی ایجاد شده توسط $P_1', \dots, P_l'$ را F° می‌نامیم، $F^\circ = \langle P_1', \dots, P_l' \rangle$. داریم $P_{l+1}, \dots, P_k \in F^\circ$ زیرا که افزودن هر یک به $\{P_1', \dots, P_l'\}$ وابستگی خطی ایجاد می‌کند. F° یک زیرفضای خطی lـ بعدی است، $l \leq k$، و اگر آن را با P_0

انتقال دهیم، یک زیرمجموعهٔ مستوی lـ بعدی F به‌دست می آید:

$$F = \langle P_0; P'_1, \ldots, P'_l \rangle$$

که P_0، $P_1 = P_0 + P'_1$، ...، $P_k = P_0 + P'_k$ همه عضو آن هستند. چون $l < k$، این خلاف فرض گزاره است. نتیجه این که وابستگی خطی $\{P'_1, \ldots, P'_k\}$ منجر به تناقض شد و این مجموعه باید مستقل خطی باشد. بنابراین $\{P'_1, \ldots, P'_k\}$ یک پایه برای E_1° است و طبق گزارهٔ (۳—۲) داریم

$$E_1 = \langle P_0; P'_1, \ldots, P'_k \rangle$$

چون $P_0, P_1, \ldots, P_k \in E_2$، عین همین استدلال برای E_2 نیز کار می‌کند و نتیجه می‌شود که:

$$E_2 = \langle P_0; P'_1, \ldots, P'_k \rangle$$

و $E_1 = E_2$ نتیجه می‌شود. □

مفهوم توازی را که برای خط و صفحه تعریف کردیم می‌توانیم به زیرفضاهای مستوی از هر بعد تعمیم دهیم. فرض کنید E_1, E_2 دو زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ باشند. می‌گوییم E_1, E_2 موازی هستند، و می‌نویسیم $E_1 \| E_2$، در صورتی که اشتراک E_1, E_2 تهی باشد و برای انتقال یافته‌های آنها به مبدأ، یعنی E_1°, E_2°، داشته باشیم $E_2^\circ \subset E_1^\circ$ یا $E_1^\circ \subset E_2^\circ$.

مثال. وضعیت نسبی خط راست $l : \frac{x_1-2}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{0} = \frac{x_4-1}{1} = \frac{x_1+2}{-1}$ را با زیرفضای سه بعدی $E = \langle e_3; e_1, e_4, e_5 \rangle$ از $\mathbb{R}^5$ بررسی کنید. عناصر E به شکل $(x_1, 0, 1, x_4, x_5)$، و برای نقاط l مؤلفه سوم صفر است، پس $l \cap E$ تهی است. داریم $l^\circ : \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{0} = \frac{x_4}{1} = \frac{x_1}{-1}$ و $E^\circ = \langle e_1, e_4, e_5 \rangle$، یعنی مؤلفه‌های دوم و سوم عناصر E° صفر هستند. حال نقطهٔ $(1, 2, 0, 1, -1)$ روی l° قرار دارد ولی در E° نیست، پس $l^\circ \not\subset E^\circ$. از طرفی دیگر $E^\circ \not\subset l^\circ$ زیرا که بعد E° از بعد l° بزرگتر است. پس E و l موازی نیستند. E و l را مثل گذشته متنافر می‌نامیم.

ضرب داخلی و هندسهٔ اقلیدسی در $I\!R^n$ (۱)

تاکنون مفاهیم ابتدایی نقطه، خط، صفحه و توازی را به $\mathbb{R}^n$ تعمیم داده‌ایم. در هندسهٔ مقدماتی طول و زاویه نیز نقش مهمی ایفا می‌کنند. هدف بعدی ما معرفی این مفاهیم در $\mathbb{R}^n$ و بحث پیرامون موضوع‌های هندسی وابسته به آنهاست. برای این کار رابطهٔ طول، زاویه و ضرب داخلی بردارها در $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$ را یادآوری می‌کنیم و خاطر نشان می‌سازیم که هر دو مفهوم "طول" و "زاویه" را می‌توان برحسب ضرب داخلی بیان کرد. از این رو در $\mathbb{R}^n$ ضرب داخلی را مبنای بحث قرار می‌دهیم.

اگر $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ دو بردار در $\mathbb{R}^۳$ باشند اغلب حاصل‌ضرب داخلی آنها، $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u \cdot v = |u||v| \cos \alpha \qquad (۱)$$

که $\alpha \in [\circ, \pi]$ زاویه بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ است و $|\ |$ طول بردار را نمایش می‌دهد. با قرار دادن $\mathbf{u} = \mathbf{v}$، از (۱) نتیجه می‌شود که:

$$|u| = \sqrt{u \cdot u} \qquad (۲)$$

یعنی طول بردار را می‌توان برحسب ضرب داخلی بیان کرد. حال اگر $u \neq \underline{\circ}$ و $v \neq \underline{\circ}$، به طوری که زاویهٔ بین آنها، $\alpha \in [\circ, \pi]$، معنی داشته باشد، از (۱) می‌توان نوشت:

$$\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}} \qquad (۳)$$

تابع کسینوس روی بازهٔ $[0, \pi]$ یک به یک است و همهٔ مقادیر ممکن برای کسینوس، یعنی اعداد بازهٔ $[-1, 1]$ را (یک بار) اتخاذ می‌کند، پس تابع معکوس $\cos^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ وجود دارد و می‌توان نوشت:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}}\right) \qquad (4)$$

بدین ترتیب مفهوم زاویهٔ بین دو بردار نیز به کمک (۴)از ضرب داخلی به‌دست می‌آید. حال اگر بتوان حاصل‌ضرب داخلی دو بردار را مستقل از "طول" و "زاویه" تعریف کرد، می‌توان با به‌کار گرفتن (۲) و (۴) به تعریف مفاهیم طول و زاویه رسید. در واقع در هندسهٔ تحلیلی دو بعدی و سه بعدی عبارتی جبری برای حاصل‌ضرب داخلی به‌دست می‌آید (به کمک قضیهٔ مثلثاتی "قاعده کسینوس") که این خواست را برآورده می‌کند. در $\mathbb{R}^2$ اگر $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ و $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ثابت می‌شود که:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 \qquad (5)$$

و نیز در $\mathbb{R}^3$، برای $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ و $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \qquad (6)$$

عبارت‌های جبری (۵) و (۶) تعریف زیر را در $\mathbb{R}^n$ القا می‌کنند:

(۴—۱) تعریف. برای $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ و $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$، حاصل‌ضرب داخلی، $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$$

خواص زیر همه به سادگی از تعریف فوق نتیجه می‌شوند:

(۴—۲) خواص ابتدایی حاصل‌ضرب داخلی

(۴—۲—۱) برای هر $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$، $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$.

(۴—۲—۲) برای هر $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$، $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})$ و $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$.

(۴—۲—۳) برای هر $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ و هر $r\in\mathbb{R}$، $(r\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=r(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$ و $\mathbf{u}\cdot(r\mathbf{v})=r(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$.

(۴—۲—۴) برای هر $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$، $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\geq ۰$ و $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=۰$ اگر و تنها اگر $\mathbf{u}=\underline{۰}$.

با توجه به (۴—۲—۴) و با الهام از (۲)، طول $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|u|=\sqrt{u\cdot u} \qquad (۷)$$

تنها nـ تایی دارای طول صفر، $\underline{۰}$ است. برای $|\mathbf{u}|$، علاوه بر طول، اصطلاح‌های نرم و قدرمطلق نیز به‌کار می‌رود. بعضی $|\mathbf{u}|$ را به $\|\mathbf{u}\|$ نمایش می‌دهند.

اکنون می‌خواهیم مفهوم زاویهٔ بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ را نیز همانند (۴) تعریف کنیم. برای این کار باید اطمینان حاصل کرد که با تعریف ارائه شده در $\mathbb{R}^n$، مقدار عبارت $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}}$ همواره در بازهٔ $[-۱,۱]$ قرار دارد.

(۴—۳) نامساوی کوشی‌ـ شوارتس. برای هر $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$:

$$|u\cdot v|\leq|u||v|$$

به علاوه شرطی لازم و کافی برای برقراری تساوی این است که $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ همراستا باشند.

اثبات. نخست حالتی را در نظر بگیرید که $\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}$ همراستا هستند. اگر یکی از $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ صفر باشد که دو طرف نامساوی بالا صفر می‌شود، در غیر این صورت $\mathbf{v}=r\mathbf{u}$ برای عدد حقیقی مناسب r. در این صورت هر دو طرف نامساوی به $|r||\mathbf{u}|^۲$ تبدیل می‌شود و تساوی برقرار است. حال فرض کنید $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ همراستا نباشند، بالاخص $\mathbf{u}\neq ۰$ و $\mathbf{v}\neq ۰$. nـ تایی $x\mathbf{u}+\mathbf{v}$، $x\in\mathbb{R}$، را در نظر بگیرید. داریم

$x\mathbf{u}+\mathbf{v}\neq ۰$ زیرا در غیر این صورت $\mathbf{v}=-x\mathbf{u}$ و همراستایی ایجاد می‌شود. پس:

(طبق ۴—۲—۴) $\qquad (xu+v)\cdot(xu+v)>۰$

(با استفاده مکرر از ۴—۲—۲) $\qquad (xu)\cdot(xu)+(xu)\cdot v+v\cdot(xu)+(v\cdot v)>۰$

(با استفاده مکرر از ۴—۲—۳ و ۴—۲—۱) $\qquad (u\cdot u)x^{۲}+۲(u\cdot v)x+(v\cdot v)$

این نامساوی درجهٔ دوم نسبت به x برای هر عدد حقیقی x برقرار است، پس مبین عبارت منفی است:

$$(u\cdot v)^{۲}-(u\cdot u)(v\cdot v)<۰$$

یا

$$|u\cdot v|^{۲}<|u|^{۲}|v|^{۲}$$

که نامساوی مورد نظر است. □

حال با توجه به نامساوی ثبت شده داریم

$$-۱\leq\frac{u\cdot v}{\sqrt{u\cdot u}\sqrt{v\cdot v}}=\frac{u\cdot v}{|u||v|}\leq ۱$$

و یگانه مقدار واقع در $[۰,\pi]$ که کسینوس آن برابر $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}}$ است زاویهٔ بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ می‌نامیم:

$$\measuredangle(u,v)=\cos^{-۱}\frac{u\cdot v}{\sqrt{u\cdot u}\sqrt{v\cdot v}} \tag{۸}$$

قضیهٔ زیر که از ابتدایی‌ترین قضایای هندسه است، از نامساوی کوشی‌ـ شوارتس نتیجه می‌شود:

(۴—۴) نامساوی مثلث برای هر $u,v\in\mathbb{R}^n$

$$|u+v|\leq|u|+|v|$$

شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی این است که یکی از $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ مضربی نامنفی از دیگری باشد.

اثبات. کافی است نامساوی برای مجذور دو طرف ثابت شود، یعنی:

$$|u+v|^{۲}\leq|u|^{۲}+|v|^{۲}+۲|u||v|$$

که معادل است با

$$(u+v)\cdot(u+v) \leq (u\cdot u) + (v\cdot v) + ۲|u||v|$$

و پس از ساده کردن:

$$u\cdot v \leq |u||v|$$

$$|u||v|\cos\measuredangle(u,v) \leq |u||v| \qquad \text{(طبق نتیجه نامساوی کوشی‌ـ شوارتس)}$$

اگر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ صفر باشد (که در این صورت یکی مضرب صفر از دیگری است) تساوی برقرار می‌شود، و اگر هر دو ناصفر باشند، رابطهٔ بالا معادل است با:

$$\cos\measuredangle(u,v) \leq ۱$$

که همواره برقرار است. تساوی در صورتی حاصل می‌شود که $\cos\measuredangle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = ۱$، یعنی $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ همراستا و هم‌جهت باشند. □

برای دو عنصر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ از $\mathbb{R}^n$ می‌نویسیم $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$، و می‌گوییم $\mathbf{u}$ بر $\mathbf{v}$ عمود است در صورتی که $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ۰$. قضیهٔ فیثاغورس که پایهٔ هندسهٔ اقلیدسی است در $\mathbb{R}^n$ با تعاریف طول و زاویهٔ ذکر شده برقرار است:

(۴—۵) قضیه فیثاغورس. هرگاه برای $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ داشته باشیم $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$، آنگاه:

$$|u+v|^۲ = |u|^۲ + |v|^۲$$

اثبات. عبارت بالا را می‌توان به صورت

$$(u+v)\cdot(u+v) = (u\cdot u) + (v\cdot v)$$

نوشت که با توجه به $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ۰$ برقرار است. □

توجه کنید که با همین استدلال (یا جایگزینی $-\mathbf{v}$ به جای $\mathbf{v}$)، رابطهٔ $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^{۲} = |\mathbf{u}|^{۲} + |\mathbf{v}|^{۲}$ نیز تحت فرض $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ۰$ برقرار است. در $\mathbb{R}^n$ نیز، مانند $\mathbb{R}^{۲}$، قضیهٔ فیثاغورس به شکل $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^{۲} = |\mathbf{u}|^{۲} + |\mathbf{v}|^{۲}$ حالت خاص قاعدهٔ کسینوس است که می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$|u-v|^{۲} = |u|^{۲} + |v|^{۲} - ۲|u||v|\cos\measuredangle(u,v) \qquad v \neq \underline{۰}, u \neq \underline{۰} \text{ برای هر} \qquad (۹)$$

این نیز از محاسبه‌ای مشابه محاسبهٔ بالا با استفاده از (۸) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} |u-v|^{۲} &= (u-v)\cdot(u-v) \\ &= |u|^{۲} + |v|^{۲} - ۲(u\cdot v) \\ &= |u|^{۲} + |v|^{۲} - ۲|u||v|\cos\measuredangle(u,v) \qquad (\text{طبق } (۸)) \end{aligned}$$

به طور کلی، هرگاه $\mathbf{x} = (x_۱,\ldots,x_n)$ و $\mathbf{y} = (y_۱,\ldots,y_n)$ دو عنصر $\mathbb{R}^n$ باشند، فاصلهٔ $\mathbf{x}$ از $\mathbf{y}$، که گاهی به $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ نمایش داده می‌شود، برابر $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ تعریف می‌شود. این تعریف با آنچه از بردارها در $\mathbb{R}^{۲}$ و $\mathbb{R}^{۳}$ می‌دانیم سازگار است. قضیه‌های هندسی اخیر را می‌توانیم با توجه به این تعریف به صورت‌های آشناتری نیز ارائه کنیم:

(۴—۶) نامساوی مثلث. برای $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ در $\mathbb{R}^n$:

$$|y-z| \leq |y-x| + |x-z|$$

(۴—۷) قضیهٔ فیثاغورس. هرگاه برای $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ در $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم $(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \perp (\mathbf{x}-\mathbf{z})$، آنگاه:

$$|y-z|^{۲} = |y-x|^{۲} + |z-x|^{۲}$$

(۴—۸) قاعدهٔ کسینوس. برای هر $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ در $\mathbb{R}^n$ داریم:

$$|y-z|^{۲} = |y-x|^{۲} + |z-x|^{۲} - ۲|y-x||z-x|\cos\measuredangle(y-x,z-x)$$

هر یک از این روابط با جایگزینی در رابطهٔ متناظر به‌دست می‌آید. در (۴—۶) بنویسید $\mathbf{u}=\mathbf{y}-\mathbf{x}$ و $\mathbf{v}=\mathbf{x}-\mathbf{z}$، آنگاه $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{y}-\mathbf{z}$. در مورد (۴—۷) و (۴—۸)، می‌نویسیم $\mathbf{u}=\mathbf{y}-\mathbf{x}$ و $\mathbf{v}=\mathbf{z}-\mathbf{x}$، آنگاه $\mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{y}-\mathbf{z}$.

(۴—۹) تصویر قائم روی یک راستا. یکی از موارد استفاده مهم ضرب داخلی در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ محاسبهٔ تصویر قائم یک بردار روی راستایی است که یک بردار ناصفر دیگر پدید می‌آورد (شکل ۱).

شکل ۱

اگر $\mathbf{v}\neq\underline{0}$ و $\mathbf{u}$ در $\mathbb{R}^3$ باشند، $\mathbf{u}'$، تصویر قائم $\mathbf{u}$ بر راستای $\mathbf{v}$، برداری است که طول آن برابر $|\mathbf{u}||\cos\measuredangle(\mathbf{u},\mathbf{v})|$ است (در حالتی که $\mathbf{u}=\underline{0}$، این طول برابر صفر در نظر گرفته می‌شود هرچند که زاویهٔ بین $\mathbf{u},\mathbf{v}$ تعریف نشده است)، $\mathbf{u}'$ مضربی از $\mathbf{v}$ است، $\mathbf{u}'=r\mathbf{u}$، و علامت r با علامت کسینوس زاویهٔ بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ یکی است. بدین ترتیب اگر $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|}$ بردار واحد در جهت $\mathbf{v}$ باشد، می‌توان نوشت:

$$u'=|u|\cos\measuredangle(u,v)\frac{v}{|v|} \qquad (10)$$

یا معادلاً:

$$u'=\frac{u\cdot v}{|v|^2}v \qquad (11)$$

با توجه به این که عبارت‌های سمت راست (۱۱)همه در $\mathbb{R}^n$ معنی دارند، می‌توانیم تصویر قائم $\mathbf{u}$ بر $\mathbf{v}\neq\underline{0}$ در $\mathbb{R}^n$ را نیز به صورت (۱۱) تعریف کنیم. در حالت خاصی که $\mathbf{v}$ یک بردار واحد باشد:

$$u'=(u\cdot v)v \quad \text{اگر} \quad |v|=1 \qquad (12)$$

مثال (پایهٔ متداول $\mathbb{R}^n$). $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ را مانند مثال صفحه ۸ جلسه قبل در نظر بگیرید، یعنی

$$e_1=(1,0,\ldots,0),e_2=(0,1,0,\ldots,0),\ldots,e_n=(0,\ldots,0,1)$$

هر $\mathbf{x} = (x_۱, \ldots, x_n)$ را می‌توان به صورت:

$$x = x_۱ e_۱ + \cdots + x_n e_n$$

نوشت. در واقع $x_i \mathbf{e}_i$ تصویر قائم $\mathbf{x}$ بر راستای $\mathbf{e}_i$ (محور i ام) است:

$$(x \cdot e_i) e_i = x_i e_i$$

پس می‌توان نوشت:

$$x = \sum_{i=۱}^{n} (x \cdot e_i) e_i \qquad (۱۳)$$

مجموعه $\{\mathbf{e}_۱, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ را پایه متداول $\mathbb{R}^n$ می‌نامند.

ضرب داخلی و هندسهٔ اقلیدسی در $I\!\!R^n$ (۲)

در پایان جلسهٔ گذشته مشاهده کردیم که اگر $e_1, \ldots, e_n$ پایهٔ متداول $\mathbb{R}^n$ باشد، هر عنصر x از $\mathbb{R}^n$ را می‌توان به صورت

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i) e_i \tag{1}$$

نمایش داد. حال به یک تعمیم این مطلب اشاره می‌کنیم. به طور کلی، اگر $\{b_1, \ldots, b_k\}$ یک مجموعه در $\mathbb{R}^n$ باشد (در حالت خاص، پایه‌ای برای زیرفضای خطی E از $\mathbb{R}^n$)، $\{b_1, \ldots, b_k\}$ را متعامد می‌نامیم در صورتی که $b_i \perp b_j$ برای $i \neq j$. مجموعهٔ $\{b_1, \ldots, b_k\}$ را راست هنجار می‌نامیم در صورتی که متعامد باشد و به علاوه $|b_i| = 1$ برای $i = 1, \ldots, k$. به عنوان نمونه، $\{e_1, \ldots, e_n\}$ یک پایه راست هنجار برای $\mathbb{R}^n$ است و هرگاه اعداد حقیقی ناصفر $c_1, \ldots, c_n$ داده شده باشند، $\{c_1 e_1, \ldots, c_n e_n\}$ یک پایهٔ متعامد برای $\mathbb{R}^n$ است. حال فرض کنید $\{b_1, \ldots, b_k\}$ یک پایهٔ راست هنجار برای زیرفضای خطی E باشد و $x \in E$. داریم $x = \sum_{i=1}^{k} t_i b_i$. اگر ضرب داخلی دو طرف را با b_j، j ثابت، محاسبه کنیم، حاصل می‌شود $x \cdot b_j = \sum_{i=1}^{k} t_i (b_i \cdot b_j)$. از آنجا که پایه راست هنجار است، نتیجه می‌شود که $b_i \cdot b_j = 0$ اگر $i \neq j$ و $b_j \cdot b_j = 1$، پس $x \cdot b_j = t_j$. بنابراین عین فرمول (۱) در اینجا نیز برقرار است:

$$x = \sum_{i=1}^{k} (x \cdot b_i) b_i \tag{2}$$

بدین ترتیب محاسبهٔ ضرایب نمایش نسبت به یک پایهٔ راست هنجار بسیار ساده است. به زودی یک روش عمومی برای ساختن پایه‌های راست هنجار برای زیرفضاهای خطی ارائه خواهیم کرد، ولی مقدمتاً گزارهٔ زیر را مطرح می‌کنیم:

(۱۰–۱) **گزاره.** اگر $\{B_1, \ldots, B_k\}$ یک مجموعهٔ متعامد متشکل از عناصر ناصفر $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه $\{B_1, \ldots, B_k\}$ مستقل خطی است.

اثبات. فرض کنید $c_1 B_1 + \cdots + c_k B_k = \underline{o}$، باید ثابت کنیم همهٔ c_i ها صفر هستند. برای j ثابت و دلخواه، حاصل‌ضرب داخلی دو طرف رابطه را با B_j محاسبه می‌کنیم:

$$c_1(B_1 \cdot B_j) + \cdots + (B_k \cdot B_j) = 0$$

ولی $B_i \cdot B_j = 0$ مگر وقتی که $i = j$ که در این صورت $B_j \cdot B_j = |B_j|^2$ ناصفر است زیرا که همه $B_1, \ldots, B_k$ ناصفر فرض شده‌اند. پس از رابطهٔ $c_j |B_j|^2 = 0$ نتیجه می‌گیریم که $c_j = 0$. چون j در بین $1, \ldots, k$ دلخواه بود، حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

اکنون نشان می‌دهیم چگونه می‌توان به کمک هر پایهٔ داده شده برای زیرفضای خطی E، یک پایهٔ راست هنجار برای E ساخت:

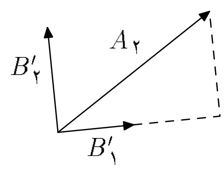
(۱۰–۲) **روش گرام– اشمیت.** فرض کنید E یک زیرفضای خطی k– بعدی از $\mathbb{R}^n$ است که متشکل از ترکیب‌های خطی $t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k$ از مجموعهٔ مستقل خطی $\{A_1, \ldots, A_k\}$ می‌باشد. می‌خواهیم یک پایهٔ راست هنجار $\{B_1, \ldots, B_k\}$ برای E بسازیم. برای این کار نخست یک پایهٔ متعامد $\{B'_1, \ldots, B'_k\}$ برای E به‌دست می‌آوریم، سپس با قرار دادن $B_i = \frac{1}{|B'_i|} B'_i$، یک پایهٔ راست هنجار حاصل می‌شود.

برای ساختن $\{B'_1, \ldots, B'_k\}$، گام به گام به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) قرار می‌دهیم $B'_1 = A_1$.

۲) برای ساختن B'_2، تصویر قائم A_2 بر $B'_1 = A_1$ را از A_2 کم می‌کنیم:

$$B'_2 = A_2 - \frac{A_2 \cdot B'_1}{B'_1 \cdot B'_1} B'_1 \tag{۳}$$



توجه کنید که $B'_2 \perp B'_1$ زیرا حاصل‌ضرب داخلی طرف راست با B'_1 صفر می‌شود. به علاوه $B'_2 \neq \underline{\circ}$ زیرا که اگر $B'_2 = \underline{\circ}$، آنگاه با توجه به این که $A_1 = B'_1$، یک رابطهٔ وابستگی خطی $A_2 - \frac{A_2 \cdot B'_1}{B'_1 \cdot B'_1} A_1$ در $\{A_1, A_2\}$ پدید می‌آید که خلاف فرض استقلال خطی $\{A_1, \ldots, A_k\}$، و در نتیجه استقلال خطی هر زیرمجموعهٔ آن، است. نتیجه این که بنابر گزارهٔ ۱۰—۱، $\{B'_1, B'_2\}$ مستقل خطی است. ضمناً توجه کنید که $\langle B'_1, B'_2 \rangle = \langle A_1, A_2 \rangle$ زیرا که $B'_1 = A_1$ و طبق (۳) می‌توان نقش A_2 و B'_2 را مبادله کرد.

۳) به طور استقرایی می‌توان به این روش ادامه داد. اگر $\{B'_1, \ldots, B'_j\}$ به‌دست آمده باشد، $j < k$، که عناصر آن ناصفر و دو به دو بر هم عمودند به طوری که $\langle B'_1, \ldots, B'_j \rangle = \langle A_1, \ldots, A_j \rangle$، B'_{j+1} را به روش زیر می‌سازیم:

$$B'_{j+1} = A_{j+1} - \frac{A_{j+1} \cdot B'_1}{B'_1 \cdot B'_1} B'_1 - \cdots - \frac{A_{j+1} \cdot B'_j}{B'_j \cdot B'_j} B'_j \tag{۴}$$

در واقع در (۴) تصویر قائم A_{j+1} بر تک تک $B'_1, \ldots, B'_j$ را از A_{j+1} کم کرده‌ایم. حاصل باید بر $B'_1, \ldots, B'_j$ عمود باشد که این موضوع با محاسبه حاصل‌ضرب داخلی دو طرف راست (۴) با B'_i، $i = 1, \ldots, j$، مشاهده می‌شود. همچنین توجه کنید که $B'_{j+1} \neq \underline{\circ}$ زیرا که طبق فرض

استقراء $\langle B'_1,\ldots,B'_j\rangle=\langle A_1,\ldots,A_j\rangle$، و $\{A_1,\ldots,A_j,A_{j+1}\}$ مستقل خطی است. و بالاخره مجموعهٔ متعامد $\{B'_1,\ldots,B'_{j+1}\}$ که همهٔ عناصرش ناصفرند، طبق ۱۰—۱ مستقل خطی است و مجدداً با استدلال مشابه گام ۲ داریم $\langle B'_1,\ldots,B'_{j+1}\rangle=\langle A_1,\ldots,A_{j+1}\rangle$.

بدین ترتیب با ادامهٔ روش، در k گام به مجموعهٔ $\{B'_1,\ldots,B'_k\}$ دست می‌یابیم که از عناصر ناصفر دو به دو بر هم عمود در E تشکیل شده است. چون تعداد عناصر برابر بعد E است و مجموعه طبق ۱۰—۱ مستقل خطی است، به یک پایهٔ متعامد برای E دست یافته‌ایم. □

مثال. تحقیق می‌کنیم که مجموعه $\{A_1,A_2,A_3\}$ در $\mathbb{R}^4$ که در آن $A_1=(0,0,-1,1)$، $A_2=(1,0,2,0)$، و $A_3=(1,1,3,0)$ یک مجموعهٔ مستقل خطی است. فرض کنید $c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3=\underline{0}$، پس

$$(c_2+c_3,c_3-c_1+2c_2+3c_3,c_1)=(0,0,0,0)$$

نتیجه این که $c_3=0$ و $c_1=0$ که از اینها نتیجه می‌شود $c_2=0$، پس $\{A_1,A_2,A_3\}$ مستقل خطی است. E را زیرفضای متشکل از ترکیب‌های خطی A_1,A_2,A_3 می‌گیریم، $E=\langle A_1,A_2,A_3\rangle$. توجه کنید که $\{A_1,A_2,A_3\}$ متعامد نیست، مثلاً $A_1\cdot A_2=-2\neq 0$. روش گرام‌ـ اشمیت را به‌کار می‌گیریم:

$$B'_1=A_1=(0,0,-1,1)$$

$$B_2=(1,0,2,0)-\tfrac{(1,0,2,0)\cdot(0,0,-1,1)}{(0,0,-1,1)\cdot(0,0,-1,1)}(0,0,-1,1)=(1,0,2,0)+(0,0,-1,1)$$

یا $B'_2=(1,0,1,1)$. بالاخره:

$$\begin{aligned}B'_3 &= (1,1,3,0)-\tfrac{(1,1,3,0)\cdot(0,0,-1,1)}{(0,0,-1,1)\cdot(0,0,-1,1)}(0,0,-1,1)-\tfrac{(1,1,3,0)\cdot(1,0,1,1)}{(1,0,1,1)\cdot(1,0,1,1)}(1,0,1,1)\\ &= (1,1,3,0)+\tfrac{3}{2}(0,0,-1,1)-\tfrac{4}{3}(1,0,1,1)\\ &= (-\tfrac{1}{3},1,\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6})\end{aligned}$$

پس مجموعهٔ $\{(۰,۰,-۱,۱),(۱,۰,۱,۱),(-\frac{۱}{۳},۱,\frac{۱}{٦},\frac{۱}{٦})\}$ یک پایهٔ متعامد برای E است، که می‌توان این مطلب را مستقیماً نیز تحقیق کرد. برای یافتن یک پایهٔ راست هنجار، هر یک از B'_i ها را در معکوس طول آن ضرب می‌کنیم:

$$B_۱ = (۰, ۰, -\frac{۱}{\sqrt{۲}}, \frac{۱}{\sqrt{۲}})$$

$$B_۲ = (\frac{۱}{\sqrt{۳}}, ۰, \frac{۱}{\sqrt{۳}}, \frac{۱}{\sqrt{۳}})$$

$$B_۳ = (-\frac{۲}{\sqrt{۴۲}}, \frac{٦}{\sqrt{۴۲}}, \frac{۱}{\sqrt{۴۲}}, \frac{۱}{\sqrt{۴۲}})$$

روش گرام‌ـ اشمیت در تکمیل یک مجموعهٔ متعامد (یا راست هنجار) به یک پایهٔ کامل نیز به‌کار گرفته می‌شود:

(۱۰ــ۳) تکمیل مجموعهٔ متعامد به پایه. فرض کنید $\{B_۱,\ldots,B_k\}$ یک مجموعهٔ راست هنجار از عناصر E باشد که $k < n$. نشان می‌دهیم چگونه می‌توان با استفاده از روش ۱۰ــ۲، عناصر $B_{k+۱},\ldots,B_n$ از $\mathbb{R}^n$ یافت، به طوری که $\{B_۱,\ldots,B_n\}$ یک پایهٔ راست هنجار برای تمام $\mathbb{R}^n$ باشد. چون $k < n$، عنصری $A_{k+۱}$ از $\mathbb{R}^n$ یافت می‌شود که در $\langle A_۱,\ldots,A_k\rangle$ نیست. به روش گرام‌ـ اشمیت با کم کردن تصویر قائم $A_{k+۱}$ بر $B_۱,\ldots,B_k$، عنصری $B'_{k+۱}$ به‌دست می‌آوریم که $\{B_۱,\ldots,B_k,B'_k\}$ متعامد و مستقل خطی است:

$$B'_{k+۱} = A_{k+۱} - (A_{k+۱}\cdot B_۱)B_۱ - \cdots - (A_{k+۱}\cdot B_k)B_k$$

سپس با تعریف $B_{k+۱} = \frac{۱}{|B'_{k+۱}|}B'_{k+۱}$، یک مجموعه $\{B_۱,\ldots,B_k,B_{k+۱}\}$ حاصل می‌شود که عناصر آن طول واحد دارند و دو به دو بر هم عمودند (یعنی یک مجموعهٔ راست هنجار). اگر $k+۱ = n$ که چون این مجموعه مستقل خطی به تعدادی برابر بعد $\mathbb{R}^n$ عضو دارد، خود یک پایهٔ راست هنجار برای $\mathbb{R}^n$ می‌شود، $\langle B_۱,\ldots,B_{k+۱}\rangle = \mathbb{R}^n$. اگر $k+۱ < n$، عنصری $A_{k+۲}$ در $\mathbb{R}^n$ یافت می‌شود که در $\langle B_۱,\ldots,B_{k+۱}\rangle$ نیست. به روش بالا، از $A_{k+۲}$، عنصری $B_{k+۲}$ می‌سازیم که

$\{B_1, \ldots, B_{k+2}\}$ راست هنجار است. اگر این عمل را $(n-k)$ بار انجام دهیم به یک مجموعه راست هنجار n عضوی $\{B_1, \ldots, B_n\}$ می‌رسیم که بنابراین یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ خواهد بود.

(۴—۱۰) کاربرد در معادلهٔ زیرفضاها. زیرفضای مستوی E از $\mathbb{R}^n$ را یک ابرصفحه در $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم در صورتی که بعد E برابر $(n-1)$ باشد. بدین ترتیب ابرصفحه‌های $\mathbb{R}$، نقاط $\mathbb{R}$ هستند، ابرصفحه‌های $\mathbb{R}^2$، خطوط راست در $\mathbb{R}^2$، و ابرصفحه‌های $\mathbb{R}^3$، صفحات واقع در $\mathbb{R}^3$ می‌باشند. حال یک ابرصفحهٔ E از $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. اگر E° انتقال‌یافتهٔ E به $\underline{0}$ باشد، می‌توان برای E° یک پایهٔ متعامد $\{B_1, \ldots, B_{n-1}\}$ طبق روش گرام‌ـ اشمیت در نظر گرفت. با استفاده از ۱۰—۳، عنصری C، $C \neq 0$، در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که بر $B_1, \ldots, B_{n-1}$ عمود است و در نتیجه $\{B_1, \ldots, B_{n-1}, C\}$ یک پایهٔ متعامد برای $\mathbb{R}^n$ می‌باشد. توجه کنید که شرطی لازم و کافی برای این که عنصر x از $\mathbb{R}^n$ در E° باشد این است که:

$$C \cdot x = 0 \tag{۵}$$

زیرا اگر بنویسیم $x = \sum_{i=1}^{n-1} c_i B_i + c_n C$، عناصر E° دقیقاً آن x هایی هستند که $c_n = 0$، پس اگر $x \in E$، آنگاه $B_n \cdot x = \sum_{i=1}^{n-1} c_i (B_1 \cdot B_n) = 0$ بالعکس اگر $C \cdot x = 0$، داریم

$$0 = C \cdot x = \sum_{i=1}^{n-1} c_i (C \cdot B_i) + c_n (C \cdot C) = c_n$$

حال فرض کنید ابرصفحه E به شکل $E = \langle p; B_1, \ldots, B_{n-1} \rangle$ توصیف شده است که $p = (p_1, \ldots, p_n)$ نقطه‌ای در E است. نقطهٔ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ در E است اگر و تنها اگر $x - p \in E^\circ$، پس شرطی لازم و کافی برای $x \in E$ این است که

$$(x-p) \cdot C = 0 \tag{۶}$$

اگر n تایی C را به $(C_1, \ldots, C_n)$ نمایش دهیم، (٦) معادل است با

$$C_1(x_1 - p_1) + \cdots + C_n(x_n - p_n) = 0 \qquad (7)$$

این رابطه را معادلهٔ ابرصفحهٔ گذرا از p عمود بر C می‌نامند. نمایش متداول خط در صفحه و صفحه در فضای سه بعدی حالت‌های خاص (٧) هستند.

(٧) را می‌توان به زیرفضاهای مستوی ابعاد غیر از $(n-1)$ تعمیم داد. اگر E یک زیرفضای مستوی kـ بعدی به شکل $E = \langle p; B_1, \ldots, B_k\rangle$ باشد که در آن $\{B_1, \ldots, B_k\}$ یک پایهٔ متعامد برای انتقال‌یافتهٔ E به مبدأ، E°، است، طبق روش (١٠—٣)، $\{B_1, \ldots, B_k\}$ را به پایه‌ای متعامد $\{B_1, \ldots, B_k, B_{k+1}, \ldots, B_n\}$ برای $\mathbb{R}^n$ تکمیل می‌کنیم. با استدلالی مشابه آنچه برای ابرصفحه‌ها آمد، شرطی لازم و کافی برای این که نقطهٔ x در E باشد این خواهد بود که $x - p$ بر $B_{k+1}, \ldots, B_n$ عمود باشد. پس E مجموعهٔ نقاطی است که در $(n-k)$ رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$B_{k+1} \cdot (x - p) = 0, \ldots, B_n \cdot (x - p) = 0 \qquad (8)$$

مثال. می‌خواهیم در $\mathbb{R}^4$ فاصلهٔ نقطهٔ $(2, 0, -1, 1)$ را از خط راست $\frac{x_1}{2} = \frac{x_2 - 1}{1} = \frac{x_3 + 1}{-1} = \frac{x_4}{3}$ محاسبه کنیم. مقصود از فاصلهٔ نقطه از خط، کوتاهترین فاصلهٔ ممکن از نقطهٔ داده شده به نقاط روی خط است. توجه کنید که نقطهٔ داده شده، $(2, 0, -1, 1)$، روی خط داده شده قرار ندارد (چرا؟)، پس خط و نقطه روی یک صفحه مستوی منحصر به فرد قرار می‌گیرند و می‌توان به روال هندسهٔ عادی فرض کرد کوتاهترین فاصله با رسم عمود از نقطه بر خط به‌دست می‌آید (اثباتی مستقیم از این مطلب در تمرین زیر آمده است). با فرض این مطلب برای یافتن پای عمود از $(2, 0, -1, 1)$ به خط داده شده، معادلهٔ ابرصفحهٔ گذرا از $(2, 0, -1, 1)$ عمود بر $(3, -1, 1, 2)$ را می‌نویسیم و اشتراک آن را با خط پیدا می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع نزدیکترین نقطهٔ خط به $(2, 0, -1, 1)$ است. طبق (٧)، معادله

ابرصفحه مورد نظر هست:

$$۲(x_۱-۱)+(x_۲+۱)-x_۳+۳(x_۴-۲)=۰$$

حال با جایگزینی از $\frac{x_۱}{۲}=\frac{x_۲-۱}{۱}=\frac{x_۳+۱}{-۱}=\frac{x_۴}{۳}$ در رابطهٔ بالا برحسب $x_۱$ داریم:

$$۲(x_۱-۱)+(\frac{x_۱}{۲}+۲)+(\frac{x_۱}{۲}+۱)+۳(\frac{۳}{۲}x_۱-۲)=۰$$

$$x_۱=\frac{۲}{۳}$$

پس $x_۲=\frac{۴}{۳}$، $x_۳=-\frac{۴}{۳}$ و $x_۴=۱$، و نقطهٔ $(\frac{۲}{۳},\frac{۴}{۳},-\frac{۴}{۳},۱)$ نزدیکترین نقطه خط به $(۱,-۱,۰,۲)$ می‌باشد که فاصله‌اش برابر مقدار زیر است:

$$\sqrt{(۱-\frac{۲}{۳})^۲+(-۱-\frac{۴}{۳})^۲+(\frac{۴}{۳})^۲+(۲-۱)^۲}=\frac{۵}{\sqrt{۳}}$$

تمرین. فرض کنید در $\mathbb{R}^n$، l خط گذرا از a به موازات A است، $a=(a_۱,\ldots,a_n)$، $A=(A_۱,\ldots,A_n)\neq\underline{۰}$ و $p=(p_۱,\ldots,p_n)$ یک نقطه در $\mathbb{R}^n$ است. نشان دهید به‌ازای نقطه منحصر به فردی q روی l نزدیکترین فاصله به p حاصل می‌شود و در واقع $q=a+\frac{(p-a)\cdot A}{A\cdot A}A$ (یعنی از نقطهٔ a روی l باید به اندازهٔ تصویر قائم $(p-a)$ روی A جدا کرد تا به نقطهٔ q رسید).

راهنمایی. معادلهٔ پارامتری خط l، $x_i=a_i+tA_i$، را در نظر بگیرید و مجذور فاصلهٔ p از نقطهٔ $a+tA$ را برحسب t بنویسید. عبارت به‌دست آمده، یک عبارت درجه ۲ برحسب t خواهد بود که با توجه به نقطهٔ مینیموم سهمی می‌توان t مطلوب را از آن محاسبه کرد.

نگاشت‌های خطی (۱)

وقتی $m \times n$ عدد حقیقی a_{ij}، $i = ۱, \ldots, m$، $j = ۱, \ldots, n$، را در یک قالب m در n، با m ردیف و n ستون به شکل زیر بنویسیم، یک ماتریس $m \times n$ (حقیقی) تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & \cdots & a_{۱n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

اعداد مندرج در ماتریس را درایه‌های ماتریس می‌نامند. مقصود از a_{ij} درایه‌ای است که در ردیف i ام و ستون j ام قرار دارد. گاهی اوقات A را به صورت $[a_{ij}]$، یا به طور کاملتر $[a_{ij}]_{i=۱,\ldots,m\ j=۱,\ldots,n}$ می‌نویسیم.

برای ماتریس‌های هم اندازه می‌توان عمل جمع، و عمل ضرب در اعداد حقیقی، همانند عملیات مشابه برای n تایی‌ها (بردارها) را تعریف کرد. اگر $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ دو ماتریس $m \times n$ باشند، مجموع دو ماتریس، $A + B = [c_{ij}]$ با فرمول

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (۱)$$

تعریف می‌شود. تحقیق صحت خواص زیر از تعریف سرراست است:

(۱۱–۱) خواص ابتدایی جمع ماتریس‌ها

(۱۱–۱–۱) تعویض‌پذیری (جابجایی). اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ باشند، داریم

$A+B=B+A$.

(۱۱–۱–۲) شرکت‌پذیری. اگر A، B و C ماتریس‌های $m\times n$ باشند، داریم $A+(B+C)=(A+B)+C$.

(۱۱–۱–۳) عنصر بی‌اثر. ماتریس صفر $m\times n$ که همهٔ درایه‌های آن صفر است و به O نمایش می‌دهیم (یگانه ماتریس $m\times n$) دارای این ویژگی است که برای هر ماتریس $m\times n$، A، داریم $A+O=O+A=A$.

(۱۱–۱–۴) عنصر قرینه. برای $A=[a_{ij}]$، ماتریس $-A=[b_{ij}]$ که با $b_{ij}=-a_{ij}$ تعریف می‌شود (یگانه ماتریس) دارای این ویژگی است که $A+(-A)=(-A)+A=O$.

حال اگر $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس $m\times n$ باشد و $r\in\mathbb{R}$، ماتریس $rA=[b_{ij}]$ با فرمول $b_{ij}=ra_{ij}$ تعریف می‌شود، یعنی همهٔ درایه‌های A در عدد r ضرب می‌شوند. تحقیق خواص زیر نیز سرراست است:

(۱۱–۲) خواص ابتدایی ضرب اعداد در ماتریس‌ها

(۱۱–۲–۱) $1\cdot A=A$ برای هر ماتریس A.

(۱۱–۲–۲) $(rs)A=r(sA)$ برای هر ماتریس A و هر زوج عدد حقیقی r,s.

(۱۱–۲–۳) $(r+s)A=rA+sA$ برای هر ماتریس A و هر زوج عدد حقیقی r,s.

(۱۱–۲–۴) $r(A+B)=rA+rB$ برای هر عدد حقیقی r و هر دو ماتریس هم اندازهٔ A و B.

علاوه بر عملیات بالا، مفهوم ضرب ماتریس‌ها نیز مابین ماتریس‌های اندازه‌های مناسب که توضیح

داده خواهد شد، تعریف می‌شود. اگر $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس $m\times n$ و $B=[b_{ij}]$ یک ماتریس $n\times p$ باشد، ماتریس حاصل‌ضرب، $AB=[c_{ij}]$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj} \qquad (۲)$$

توجه کنید که لازمهٔ تعریف حاصل‌ضرب این است که تعداد ستون‌های A برابر تعداد ردیف‌های B باشد، بنابراین عبارت (۲) معنی دارد و در واقع می‌توان c_{ij} را حاصل‌ضرب داخلی ردیف i ام ماتریس A به عنوان n تایی $(a_{i1},\dots,a_{in})$ با ستون j ام ماتریس B، به عنوان n تایی $(b_{j1},\dots,b_{nj})$ تلقی کرد. انگیزهٔ این تعریف را در جلسهٔ آینده بررسی خواهیم کرد.

(۱۱—۳) خواص ابتدایی ضرب ماتریس‌ها

(۱۱—۳—۱) شرکت‌پذیری. A، B و C ماتریس‌های دارای اندازهٔ به ترتیب $m\times n$، $n\times p$ و $p\times q$ هستند. در این صورت:

$$(AB)C=A(BC)$$

(۱۱—۳—۲) قانون پخشی. داریم

$$(A+B)C=(AC)+(AB) \quad , \quad A(B+C)=(AB)+(AC)$$

مشروط بر این که اندازهٔ ماتریس‌های فوق برای عملیات ذکر شده مناسب باشد.

(۱۱—۳—۳) ماتریس واحد $n\times n$، $I_n=[\delta_{ij}]$ بدین صورت تعریف می‌شود که:

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

برای هر ماتریس $m \times n$، A، و هر ماتریس $n \times p$، B، داریم:

$$A \cdot I_n = A \quad , \quad I_n \cdot B = B$$

اثبات (۱۱—۳—۱) را ارائه می‌کنیم، دوتای دیگر ساده‌ترند و تحقیق آنها به خواننده واگذار می‌شود. برای (۱۱—۳—۱) بنویسید $A = [a_{ij}]$، $B = [b_{ij}]$، $C = [c_{ij}]$، $AB = [d_{ij}]$، $BC = [e_{ij}]$، $(AB)C = [x_{ij}]$ و $A(BC) = [y_{ij}]$. طبق تعریف حاصل‌ضرب ماتریس‌ها عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
x_{ij} = &= \sum_{i=1}^{p} d_{ik}c_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p} (\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk})c_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}c_{kj} \\
&= \sum_{l=1}^{n} a_{il}(\sum_{k=1}^{p} b_{lk}c_{kj}) \\
&= \sum_{l=1}^{n} a_{il}e_{lj} \\
&= y_{ij}
\end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

در اینجا قابل ذکر است که اگر AB تعریف شده باشد، لزومی ندارد BA نیز تعریف شدنی باشد زیرا که تعریف AB مستلزم این است که تعداد ستون‌های A برابر تعداد ردیف‌های B باشد، و این حکمی در مورد برابری تعداد ستون‌های B با تعداد ردیف‌های A نمی‌کند. حتی اگر AB و BA هر دو تعریف‌شدنی باشند، لزومی ندارد هر دو یک اندازه باشند، مثلاً اگر A یک ماتریس $n \times ۱$ و B یک

ماتریس $1 \times n$ باشند، $n > 1$،

$$A = [a_1 \ \dots \ a_n] \quad , \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

AB یک ماتریس 1×1، با تک درایهٔ $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ می‌شود، در حالی که BA یک ماتریس $n \times n$ است که درایهٔ ردیف i ام و ستون j ام آن عبارت است از $b_j a_i$. حتی اگر A و B هر دو $n \times n$، با $n \geq 2$، باشند، لزومی بر تساوی AB و BA نیست، مثلاً:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

البته در مورد ماتریس I_n و هر ماتریس $n \times n$، A، از ۱۱–۳–۳ نتیجه می‌شود که $AI_n = I_n A$ $(= A)$.

توجه کنید که برای یک nـ تایی مرتب از اعداد، مثلاً $x = (x_1, \dots, x_n)$، اکنون سه نمایش ممکن داریم، یکی به صورت بالا که معمولاً تجسم برداری دارد، دیگر به صورت یک ماتریس $1 \times n$، $[x_1 \ \dots \ x_n]$ و بالاخره به صورت یک ماتریس $n \times 1$، $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. اغلب لازم است که بین این سه نمایش تمایز قائل شویم تا ابهامی در عملیات حاصل نشود. برای این منظور، هرگاه n تایی $x = (x_1, \dots, x_n)$ به صورت یک ماتریس $1 \times n$ نوشته شود، آن را به $\langle x|$ نمایش می‌دهیم، و هرگاه به صورت یک ماتریس $n \times 1$ نمایش داده شود، آن را به $|x\rangle$ نمایش می‌دهیم.

با این مقدمه در مورد ماتریس‌ها، به موضوع اصلی درس که "نگاشت‌های خطی" است می‌پردازیم. کلمات "تابع"، "نگاشت" و "تبدیل" در اینجا به صورت کاملاً مترادف به‌کار خواهند رفت هر چند که به لحاظ تاریخی گاهی تصاویر ذهنی متفاوتی از این کلمات القاء می‌شود. اگر S و T دو مجموعه باشند، مقصود از یک تابع (= نگاشت، = تبدیل) از S به T، قانونی f است که به هر عنصر s از S، عنصر مشخصی $f(s)$ از T نسبت می‌دهد. می‌نویسیم $f : S \longrightarrow T$. در گذشته کلمهٔ "تابع" معمولاً وقتی به‌کار می‌رفته است که T برابر $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد، "تبدیل" در حالت $S = T$، یعنی تابع‌های از یک مجموعه

به خود آن، و "نگاشت" برای تابع‌های $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$، m, n بزرگتر از ۱، به‌کار می‌رفته است. ما چنین تمایزهایی قایل نمی‌شویم. برای تابع $f : S \longrightarrow T$، مجموعهٔ S را دامنه (= قلمرو)، و مجموعهٔ T را بُرد می‌نامیم. مجموعه $\{f(s) \mid s \in S\}$ که یک زیرمجموعهٔ T است، تصویر f، یا تصویر S تحت f خوانده می‌شود. در واقع برای هر زیرمجموعهٔ E از S، تصویر E تحت f، که به $f(E)$ نمایش داده می‌شود به صورت:

$$f(E) = \{f(s) \mid s \in E\}$$

تعریف می‌شود. تابع f را یک به یک می‌نامیم در صورتی که $f(s_1) = f(s_2)$ همواره نتیجه دهد $s_1 = s_2$، و f پوشا می‌نامیم اگر $f(S) = T$. برای تابع‌های یک به یک و پوشا، $f : S \longrightarrow T$، تابعی به نام وارون f (یا معکوس f) به صورت زیر تعریف می‌شود که به $f^{-1} : T \longrightarrow S$ نمایش می‌دهیم. هرگاه $t \in T$، چون f پوشا است، عنصری s از S وجود دارد که $f(s) = t$. به علاوه چون f یک به یک فرض شده است، چنین عنصر s به طور منحصر به فرد تعیین می‌شود، پس f^{-1} به صورت قانونی بی‌ابهام $f^{-1}(t) = s$ تعریف شدنی است و داریم:

$$f \circ f^{-1} = 1_T \quad , \quad f^{-1} \circ f = 1_S$$

که مقصود از 1_X تابع همانی مجموعهٔ X است، $1_X(x) = x$ برای هر $x \in X$.

نماد $f^{-1}(t)$ حتی وقتی f^{-1} تعریف شدنی نباشد نیز به‌کار می‌رود. مقصود از $f^{-1}(t)$ مجموعهٔ نقاط S است که تحت f به t فرستاده (= نگاشته) می‌شوند، یعنی:

$$f^{-1}(t) = \{s \in S \mid f(s) = t\}$$

$f^{-1}(t)$ را گاهی مجموعهٔ تراز منسوب به t می‌خوانیم. به طور کلی، اگر Y زیرمجموعه‌ای از T باشد، زیرمجموعهٔ $f^{-1}(Y)$ (تصویر وارون Y) یک زیرمجموعهٔ S است که بدین صورت تعریف می‌شود:

$$f^{-1}(Y) = \{s \in S \mid f(s) \in Y\}$$

موضوع اصلی درس ما بررسی تابع‌های $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (یا به طور کلی‌تر، تابع‌های $f:S \longrightarrow \mathbb{R}^m$، $S\subset \mathbb{R}^n$) است. بدین ترتیب چنین تابع f به هر n تایی مرتب از اعداد حقیقی در دامنه، یک m تایی مرتب از اعداد حقیقی نسبت می‌دهد:

$$f(x_۱,\dots,x_n)=(y_۱,\dots,y_m) \tag{۳}$$

هر y_i وابسته به $(x_۱,\dots,x_n)$ است، پس در واقع ارائه f همانند ارائه m تابع $f_۱,\dots,f_m$، هر یک از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ است، $f_i(x_۱,\dots,x_n)=y_i$، $i=۱,\dots,m$. (۳) را به صورت زیر نیز می‌نویسیم:

$$\begin{cases} f_۱(x_۱,\dots,x_n)=y_۱ \\ \quad\dots \\ f_m(x_۱,\dots,x_n)=y_m \end{cases} \tag{۴}$$

گاهی می‌نویسیم $f=(f_۱,\dots,f_m)$ و هر f_i را یک مؤلفه f می‌نامیم.

تابع $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ در (۳) یا (۴) را خطی می‌نامیم در صورتی که هر $f_i(x_۱,\dots,x_n)$ یک عبارت همگن درجه اول نسبت به $x_۱,\dots,x_n$ باشد، یعنی:

$$\begin{cases} y_۱=a_{۱۱}x_۱+a_{۱۲}x_۲+\dots+a_{۱n}x_n \\ \quad\dots\quad\dots \\ y_m=a_{m۱}x_۱+a_{m۲}x_۲+\dots+a_{mn}x_n \end{cases} \tag{۵}$$

مقصود از "همگن" این است که همهٔ جملات سمت راست از یک درجه‌اند، در اینجا همه از درجه ۱، بالاخص جملهٔ ثابت وجود ندارد. اگر هر عبارت سمت راست را فقط درجه ۱ در نظر بگیریم و محدودیت همگن را حذف کنیم، یک عدد ثابت نیز ممکن است به هر جمله افزوده شود. این گونه تابع‌ها را مستوی می‌نامیم:

$$\begin{cases} y_۱=a_{۱۰}+a_{۱۱}x_۱+\dots+a_{۱n}x_n \\ \quad\dots\quad\dots \\ y_m=a_{m۰}+a_{m۱}x_۱+\dots+a_{mn}x_n \end{cases} \tag{٦}$$

مقدار تابع مستوی (٦) از انتقال مقدار تابع (۵) با mــ تایی ثابت $(a_{۱۰}, \dots, a_{m۰})$ به‌دست می‌آید و نیازی به بررسی جداگانهٔ تابع‌های مستوی نیست.

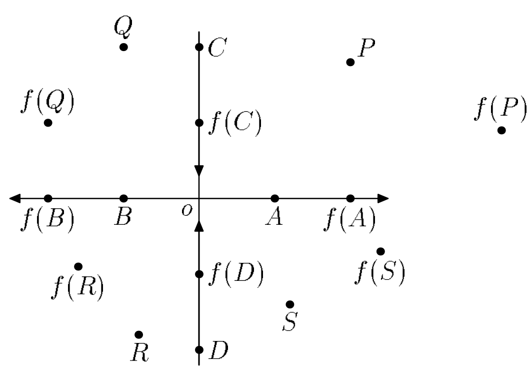
(۱۱—۴) چند مثال

(۱۱—۴—۱) هر تابع خطی $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ به شکل $f(x) = mx$ است که در آن $m \in \mathbb{R}$ یک عدد حقیقی داده شده است. تابع‌های مستوی $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ به شکل $g(x) = mx + b$، m و b اعداد حقیقی داده شده، می‌باشند.

(۱۱—۴—۲) $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x_۱, x_۲) = (۲x_۱, \frac{۱}{۲}x_۲)$$

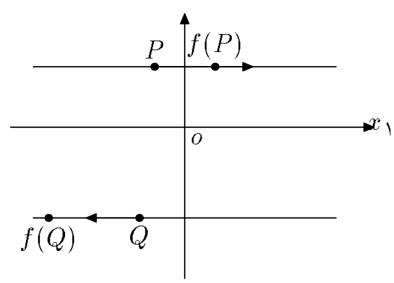
هر دو عبارت $۲x_۱$ و $\frac{۱}{۲}x_۲$ درجه ۱ همگن نسبت به $(x_۱, x_۲)$ هستند، پس f خطی است. عملکرد این تابع بدین صورت است که فاصله هر نقطه را از محور $x_۲$ به دو برابر افزایش می‌دهد و فاصلهٔ آن از محور $x_۱$ را نصف می‌کند. محور $x_۱$ با ضریب تجانس ۲ به خود آن نگاشته می‌شود (انبساط با ضریب ۲)، و محور $x_۲$ با ضریب تجانس $\frac{۱}{۲}$ روی خود منقبض می‌شود. (شکل ۱)



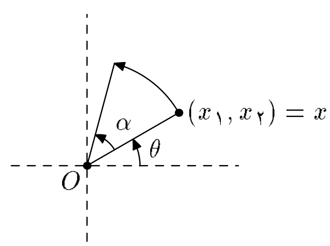
(۱۱–۴–۲) $f:\mathbb{R}^{۲}\longrightarrow\mathbb{R}^{۲}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x_{۱},x_{۲})=(x_{۱}+x_{۲},x_{۲})$$

f خطی است. توجه کنید که هر خط راست افقی $x_{۲}=c$ به خود آن نگاشته می‌شد ولی هر نقطه روی این خط به اندازه مقدار c انتقال افقی می‌یابد. بدین ترتیب خطوط راست افقی بالای محور $x_{۱}$ به طرف راست و خطوط افقی پایین محور $x_{۱}$ به سمت چپ روی خود می‌لغزند. نقاط محور $x_{۱}$ سر جای خود ثابت می‌مانند.



(۱۱–۴–۳) (دوران حول $\underline{o}$ در $\mathbb{R}^{۲}$) دوران حول $\underline{o}$ در $\mathbb{R}^{۲}$ با زاویهٔ α را در نظر بگیرید. اگر $x=(x_{۱},x_{۲})$ نقطه‌ای $\neq\underline{o}$ در صفحه باشد، نمایش آن به صورت قطبی در نظر بگیرید: $x_{۱}=|x|\cos\theta$، $x_{۲}=|x|\sin\theta$.



اگر دوران زاویهٔ α حول $\underline{o}$ را به $f:\mathbb{R}^{۲}\longrightarrow\mathbb{R}^{۲}$ نمایش دهیم، نمایش قطبی $f(x_{۱},x_{۲})$ می‌شود:

$$\begin{aligned}f(x_{۱},x_{۲}) &= (|x|\cos(\theta+\alpha),|x|\sin(\theta+\alpha))\\ &= (|x|\cos\theta\cos\alpha-|x|\sin\theta\sin\alpha,|x|\sin\theta\cos\alpha+|x|\cos\theta\sin\alpha)\\ &= ((\cos\alpha)x_{۱}-(\sin\alpha)x_{۲},(\sin\alpha)x_{۱}+(\cos\alpha)x_{۲})\end{aligned}$$

هر یک از دو مؤلفهٔ f یک تابع درجه یک همگن نسبت به (x_1, x_2) است، پس f خطی است.

(۱۱—۴—۴) (تصویر قائم روی یک زیرفضای مختصاتی) فرض کنید $n > m$ و $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$$

این تابع خطی است و عملکرد آن این است که نقطهٔ $(x_1, \ldots, x_n)$ را به $(x_1, \ldots, x_m)$، متشکل از m مؤلفهٔ اول آن، می‌نگارد. مثلاً برای $n = 3$ و $m = 2$، $f(x, y, z) = (x, y)$ تصویر قائم (x, y, z) روی صفحهٔ xy است.

(۱۱—۴—۵) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2, -x_2)$$

چون هر مؤلفه f یک عبارت درجهٔ یک همگن نسبت به (x_1, x_2) است، این تابع خطی است.

(۱۱—۴—۶) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, x_1 x_2)$$

این تابع خطی نسبت زیرا مؤلفه دوم f، یعنی $x_1 x_2$ از درجهٔ یک نیست.

اکنون ارتباط میان دو بحث این جلسه را بیان می‌کنیم. توجه کنید که می‌توان (۵) را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (۷)$$

یا به طور موجز:

$$|y\rangle = A|x\rangle \qquad (۸)$$

یعنی محاسبهٔ مقدار یک تابع خطی بدین صورت حاصل می‌شود که ضرایب a_{ij} در (۵) را در یک ماتریس $m \times n$ قرار می‌دهیم و حاصل‌ضرب این ماتریس را با ستون $|x\rangle$ محاسبه می‌کنیم. بدین ترتیب یک تناظر یک به یک میان تابع‌های خطی $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ و ماتریس‌های $m \times n$ ایجاد می‌شود.

برای مثال‌های خطی بالا، ماتریس‌های مربوط به ترتیب از بالا به پایین عبارتند از:

$$[m]$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & & O & \\ & \ddots & & O \\ O & & ۱ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

با نگاه کردن به ماتریس متناظر به یک تابع خطی می‌توان عمل تابع خطی بر اعضای پایهٔ متداول، یعنی $e_۱, \ldots, e_n$، را فوراً دریافت. توجه کنید که اگر ماتریس $A = [a_{ij}]$ از سمت چپ در ستون $|e_j\rangle$ ضرب شود، ستون jـ ام ماتریس $\begin{bmatrix} a_{۱j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ به‌دست می‌آید. بدین ترتیب، برای نوشتن ماتریس مربوط به یک تابع خطی f، کافی است $f(e_۱)$، ...، $f(e_n)$ را محاسبه کنیم و نتایج حاصل را به ترتیب در ستون‌های اول تا n ام درج کنیم.

نگاشت‌های خطی (۲)

مثال‌هایی که از تابع‌های خطی در جلسهٔ گذشته ارائه کردیم از تنوع قابل ملاحظه‌ای برخوردار بود و ممکن است این احساس را ایجاد کرده باشد که وجه تشابه چندانی میان تابع‌های خطی موجود نیست. در چند جلسهٔ آینده، برعکس، خواهیم دید که تابع‌های خطی از بعضی وجوه شباهت‌های فوق‌العاده‌ای به هم دارند. بررسی این خواص دست‌آوردهای مهمی برای ما خواهد داشت. یکی از این دستاوردها امکان بحث کامل در مورد وجود و نظام جواب‌های یک دستگاه m معادلهٔ n مجهولی درجه اول است که به آن خواهیم پرداخت. دستاوردی دیگر زمینه‌سازی برای بررسی توابع غیرخطی در باقیماندهٔ درس است که در آنجا، آنچه در چند جلسهٔ آینده در مورد تابع‌های خطی خواهیم دید رهنمودی مهم خواهد بود. در این جلسه زمینه را برای مطالعه تابع‌های خطی فراهم می‌کنیم. کار عمدهٔ ما بازبینی بعضی تعاریف و مفاهیمی خواهد بود که در جلسات قبل مطرح شده‌اند و اکنون آنها را به صورتی قابل استفاده در می‌آوریم.

(۱۲—۱) گزاره. تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ خطی است در صورتی که واجد دو شرط زیر باشد:

الف) برای هر x و x' در $\mathbb{R}^n$، $f(x + x') = f(x) + f(x')$.

ب) برای هر x در $\mathbb{R}^n$ و هر عدد حقیقی r، $f(rx) = rf(x)$.

اثبات. اگر $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ خطی باشد، ماتریس متناظر با آن، A، را در نظر می‌گیریم. عملکرد f روی عناصر x از $\mathbb{R}^n$ به صورت:

$$|f(x)\rangle = A|x\rangle \qquad (۱)$$

است. بنابراین:

$$\begin{aligned} |f(x+x')\rangle &= A|x+x'\rangle \\ &= A|x\rangle + A|x'\rangle && \text{قانون پخشی ضرب ماتریسی} \\ &= |f'(x)\rangle + |f(x')\rangle \end{aligned}$$

پس (الف) برقرار است. همین طور:

$$\begin{aligned} |f(rx)\rangle &= A|rx\rangle \\ &= r(A|x\rangle) \end{aligned}$$

و (ب) برقرار است. بالعکس فرض کنید شرط‌های (الف) و (ب) برای تابع $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ برقرارند. باید نشان دهیم ماتریسی $m\times n$، A، وجود دارد که برای هر $x\in\mathbb{R}^n$، داریم $|f(x)\rangle = A|x\rangle$. از بحث پایان جلسهٔ قبل به یاد می‌آوریم که ستون‌های ماتریس یک تابع خطی به ترتیب از مؤلفه‌های $f(e_۱)$ تا $f(e_n)$ تشکیل می‌شوند، بنابراین نامزد واضحی برای ماتریس مورد نظر A وجود دارد که باید در مورد آن ادعای $|f(x)\rangle = A|x\rangle$ را ثابت کرد. ماتریس A را این گونه در نظر می‌گیریم که ستون jـ ام آن، برای $j=۱,\ldots,n$، برابر $|f(e_j)\rangle$ باشد. برای $x=(x_۱,\ldots,x_n)=x_۱e_۱+\cdots+x_ne_n$ داریم:

$$\begin{aligned} |f(x)\rangle &= |f(x_۱e_۱+\cdots+x_ne_n)\rangle \\ &= |x_۱f(e_۱)+\cdots+x_nf(e_n)\rangle && \text{طبق (الف) و (ب)} \\ &= |x_۱f(e_۱)\rangle+\cdots+|x_nf(e_n)\rangle \\ &= x_۱|f(e_۱)\rangle+\cdots+x_n|f(e_n)\rangle \\ &= x_۱(A|e_۱\rangle)+\cdots+x_n(A|e_n\rangle) \\ &= A|x_۱e_۱\rangle+\cdots+A|x_ne_n\rangle \\ &= A|x_۱e_۱+\cdots+x_ne_n\rangle && \text{قانون پخشی ضرب ماتریسی} \\ &= A|x\rangle \end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

بدین ترتیب از این پس برای استفاده از خطی بودن یک تابع به‌کارگیری دو خاصیت (الف) و (ب) بالا کافی است و نیازی به نوشتن صریح ماتریس مربوط نیست.

در جلسهٔ قبل ضرب ماتریسی را تعریف کردیم. این تعریف در نظر اول دور از ذهن و فاقد انگیزهٔ مشخص به نظر می‌رسد، ولی گزاره زیر نشان می‌دهد که حاصل‌ضرب دو ماتریس در واقع بیانگر ترکیب تابع‌های خطی متناظر است.

(۱۲—۲) گزاره. تابع‌های خطی $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ با ماتریس A و $g:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ با ماتریس B داده شده‌اند. در این صورت ماتریس $g\circ f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ برابر BA است.

اثبات. مقدمتاً توجه کنید که $g\circ f$ در واقع یک تابع خطی است که این مطلب را می‌توان با استفاده از گزاره ۱۲—۱ ملاحظه کرد:

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x+x') &= g(f(x+x')) \\ &= g(f(x)+f(x')) && \text{چون } f \text{ خطی است} \\ &= g(f(x))+g(f(x')) && \text{چون } g \text{ خطی است} \\ &= (g\circ f)(x)+(g\circ f)(x')\end{aligned}$$

به همین روش

$$\begin{aligned}(g\circ f)(rx) &= g(f(rx)) \\ &= g(rf(x)) && \text{چون } f \text{ خطی است} \\ &= rg(f(x)) && \text{چون } g \text{ خطی است} \\ &= r(g\circ f)(x)\end{aligned}$$

حال به اثبات ادعای گزاره می‌پردازیم. ماتریس $g \circ f$ را به C نمایش می‌دهیم. داریم:

$$\begin{aligned} C|x\rangle &= |(g \circ f)(x)\rangle \\ &= |g(f(x))\rangle \\ &= B|f(x)\rangle \\ &= B|(A|x\rangle)\rangle \\ &= BA|x\rangle \qquad \text{بنابر ویژگی شرکت‌پذیری ضرب ماتریسی} \end{aligned}$$

پس $C|x\rangle = BA|x\rangle$. اگر حاصل‌ضرب دو ماتریس $p \times n$ در هر ستون n تایی برابر باشد، دو ماتریس برابرند زیرا که با گرفتن $x = e_j$، n، $j = ۱, \ldots, n$، کلیهٔ ستون‌های ماتریس‌ها به‌دست می‌آیند. □

بالاخره ضابطهٔ ساده‌ای برای تحقیق کردن این مطلب که آیا یک زیرمجموعهٔ E از $\mathbb{R}^n$ یک زیرفضای خطی است ارائه می‌کنیم.

(۱۲-۳) گزاره. زیرمجموعهٔ ناتهی E از $\mathbb{R}^n$ یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ است اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) هرگاه x و x' در E باشند، آنگاه $x + x'$ نیز در E است.

ب) هرگاه x در E باشد و $r \in \mathbb{R}$، آنگاه rx نیز در E است.

اثبات. نخست نشان می‌دهیم هر زیرفضای خطی E از $\mathbb{R}^n$ از دو ویژگی فوق برخوردار است. زیرفضای خطی E را به شکل $\langle A_۱, \ldots, A_k\rangle$، یعنی مجموعهٔ ترکیب‌های خطی $\{A_۱, \ldots, A_k\}$، که یک مجموعهٔ مستقل خطی عناصر E است، در نظر می‌گیریم. پس x و x' به شکل $x = t_۱A_۱ + \cdots + t_kA_k$ و $x' = t'_۱A_۱ + \cdots + t'_kA_k$ هستند. بنابراین داریم:

$$x + x' = (t_۱ + t'_۱)A_۱ + \cdots + (t_k + t'_k)A_k$$

و $x, x' \in E$. همین طور:

$$r(t_۱A_۱ + \cdots + t_kA_k) = (rt_۱)A_۱ + \cdots + (rt_k)A_k$$

و $rx \in E$.

بالعکس فرض کنید زیرمجموعهٔ ناتهی E از $\mathbb{R}^n$ واجد شرط‌های (الف) و (ب) باشد، نشان می‌دهیم E یک زیرفضای خطی است، یعنی برابر مجموعهٔ ترکیب‌های خطی یک مجموعهٔ مستقل خطی می‌باشد. قطعاً داریم $\underline{\circ} \in E$ زیرا که E ناتهی است یعنی عنصری x در E هست، پس طبق (ب) $\underline{\circ} = \circ \cdot x$ در E قرار دارد.

اگر E عضو دیگری نداشته باشد، یعنی $E = \{\underline{\circ}\}$ که طبق قرارداد E یگانه زیرفضای خطی صفر بعدی $\mathbb{R}^n$ است. اگر عضو دیگری $A_1 \neq \underline{\circ}$ در E باشد، طبق (ب)، همه مضارب A_1، یعنی rA_1 ها، $r \in \mathbb{R}$، در E هستند. حال اگر عضو دیگری در E نباشد، یعنی $E = \langle A_1 \rangle$، E یک زیرفضای خطی یک بعدی است. در غیر این صورت عنصری A_2 در E وجود دارد که مضرب A_1 نیست، و در نتیجه $\{A_1, A_2\}$ مستقل خطی است. طبق (الف) و (ب)، همه ترکیب‌های خطی A_1 و A_2 در E قرار دارند، یعنی $\langle A_1, A_2 \rangle \subset E$.

اگر $\langle A_1, A_2 \rangle$ همهٔ E باشد که حکم ثابت شده است، و گرنه، عنصری A_3 در E وجود دارد که $\{A_1, A_2, A_3\}$ مستقل خطی است. استدلال بالا را مجدداً به‌کار می‌گیریم. همهٔ ترکیب‌های خطی A_1, A_2, A_3، طبق (الف) و (ب)، باید در E باشند. در صورتی که $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ همه E نباشد، عنصری A_4 انتخاب می‌کنیم و غیره. این استدلال باید در حداکثر n گام به نتیجه رسد زیرا در $\mathbb{R}^n$ یک مجموعهٔ مستقل خطی نمی‌تواند بیش از n عضو داشته باشد. بنابراین اگر E فقط از $\underline{\circ}$ تشکیل نشده باشد، در گامی k، $1 \leq k \leq n$، به این نتیجه می‌رسیم که $E = \langle A_1, \ldots, A_k \rangle$ و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

توجه کنید که این گزاره نوعی تایید برقرار بودن ایدهٔ شهودی "مسطح بودن" زیرفضاهای خطی است. اگر نقطه‌ای x در E باشد خط گذرا از $\underline{\circ}$ و x به تمامی در E واقع است، و اگر x و x' در E باشند، صفحه گذرا از $\underline{\circ}$، x و x' در E واقع است. طبق قسمت دوم گزاره، اگر این دو شرط برای E برقرار باشند می‌توان حکم کرد که E متشکل از همهٔ ترکیب‌های خطی k عضو $\mathbb{R}^n$ است.