

فضای حقیقی n -بعدی

ریاضیات کلاسیک بر دو رکن اساسی "عدد" و "فضا" بنا شده است. علوم حساب و جبر از عدد نشأت می‌گیرند و هندسه، به مفهوم سنتی آن، علم فضا و اشکال و اجسام موجود در فضا است. بسیاری اوقات می‌توان با یک پدیده دو برخورد متمایز ریاضی، یکی جبری- عددی، و دیگری هندسی، داشت. در برخورد جبری یک چارچوب نمادین ارائه می‌شود که اغلب برای حل مسائل دیگری نیز قابل استفاده است و گاهی نیز منجر به فراهم ساختن یک الگوریتم یا دستورالعمل زنجیره‌ای برای حل این‌گونه مسائل می‌شود. در برخورد هندسی، که ریشه در نیروی باصره انسان دارد، سعی بر این است که جمیع روابط موجود بین اجزاء پدیده یکجا جمع گردند، خصوصیات برجسته شناسایی شوند، و حل مسأله از این مشاهدات دیده شود. به ذکر دو مثال ابتدایی می‌پردازیم:

مثال ۱. می‌خواهیم ثابت کنیم مجموع هر تعداد عدد فرد متوالی که از ۱ شروع شود یک مجذور کامل است. در واقع:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (1)$$

یک روش جبری- عددی برای اثبات این ادعا، استقراء است. حکم برای $n = 1$ صحیح است و اگر فرض کنیم (۱) برای n برقرار است، نشان می‌دهیم برای $(n + 1)$ نیز برقرار است:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

برخورد هندسی با هممین حکم در شکل ۱ دیده می‌شود. توجه کنید که اعداد فرد به صورت لایه‌هایی از گوشه‌چپ پایین افزوده می‌شوند و همواره یک مربع به ضلع n پدید می‌آید:

شکل ۱

مثال ۲. می‌خواهیم در مورد تعداد جواب‌های دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر بحث کنیم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 + x + y = 4 \end{cases} \quad (2)$$

نخست مسئله را از دیدگاه جبری بررسی می‌کنیم. با تفریق دو رابطه داریم $x + y = 2$. اگر $y = 2 - x$ را در معادله اول جایگزین کنیم نتیجه می‌شود که $2x^2 - 4x + 2 = 0$ یا $x^2 - 2x + 1 = 0$ ، پس $x = 1$. با جایگزینی در معادله اول داریم $y = \pm 1$ ولی فقط جواب $y = 1$ در معادله دوم صدق می‌کند، پس تنها جواب مسئله $(x, y) = (1, 1)$ است. یک دیدگاه هندسی برای بررسی این مسئله می‌تواند توجه به مکان هندسی دو معادله در صفحه xy باشد. دستگاه را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x + \frac{1}{4})^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

معادله اول دایره‌ای به شعاع $\sqrt{2}$ به مرکز $(0, 0)$ را نمایش می‌دهد و معادله دوم، معادله یک دایره به شعاع $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ به مرکز $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$. حال فاصله مرکز دایره‌ها برابر $\frac{1}{\sqrt{4}}$ است، پس تنها نقطه دایره اول به فاصله $\frac{\sqrt{3}}{2}$ از مرکز دایره دوم، نقطه $(1, 1)$ است، که تنها جواب مسئله می‌باشد.

توجه کنید که هرچند در راه حل هندسی نیز عملیات جبری انجام شد، لیکن این عملیات در راستای هدف‌های خاص هندسی بودند که شناخت شکل مدور مکان‌های هندسی القاء می‌کرد. برای اشکال نامأنوس یا وقتی که مقایسه طول شعاع‌ها و فواصل آسان نباشد، تحلیل جبری اجتناب‌ناپذیر است، ولی هرجا که دیدگاه هندسی مقدور باشد، معمولاً یک بینش یا تعبیر روشن‌کننده ایجاد می‌شود. نکته مهم دیگر در مورد مسئله بالا این که تعداد متغیرهای مسئله در اینجا ۲ است که بررسی هندسی آن را در صفحه xy ممکن می‌سازد. برای مسائل سه متغیری نیز می‌توان از تجسم هندسی

بهره جست. اما در بسیاری مسائل ریاضی و کاربردی، تعداد متغیرهای ذی دخل بیش از ۳ است که ظاهراً مانعی چاره‌ناپذیر در راه ارائه دیدگاه هندسی است زیرا که انسان به عنوان موجود سه بعدی هیچ گونه برداشت ادراکی مستقیم از ابعاد بالاتر از سه ندارد. یک هدف مهم ما در این جلسه و چند جلسه آینده فراهم آوردن نوعی هندسه n -بعدی است که در آن n به اعداد کوچکتر یا مساوی ۳ محدود نباشد. این هندسه را می‌توان یک زبان ریاضی مناسب برای تعمیم شهود هندسی به فرای ابعاد ۲ و ۳ تلقی کرد که همانند نیروی باصره در سوق دادن تفکر ریاضی به یافتن روش مناسب برای حل مسائل کارساز است. در اینجا هیچ‌گونه ادعایی برای "وجود" فیزیکی فضای n -بعدی مطرح نیست، بلکه یک نظام دقیق ریاضی مطرح خواهد شد که بستر مناسبی برای نوعی تجسم و شهود، هرچند مجازی و نمادین، در ابعاد بالاتر از ۳ است.

رهنمود ما برای ساختن فضای n -بعدی ارتباط جبر و هندسه در هندسه تحلیلی است. دیده‌ایم که اولین ارتباط جبر و هندسه از نسبت دادن یک عدد (یعنی "طول") به پاره‌خط‌ها آغاز می‌شود، یعنی در تناظر قرار دادن نقاط یک خط راست با مجموعه اعداد حقیقی، \mathbb{R} . در هندسه تحلیلی، نقاط یک صفحه با زوج‌های مرتب اعداد حقیقی، یعنی عناصر \mathbb{R}^2 ، و نقاط فضا با سه‌تایی‌های مرتب اعداد حقیقی، یعنی عناصر \mathbb{R}^3 ، مدرج می‌شوند. تا اینجا جبر و هندسه مستقل از یکدیگر در ذهن ما وجود دارند و هندسه تحلیلی یک پل ارتباطی است. برای $n \geq 4$ ، n -تایی‌های مرتب اعداد حقیقی معنی دارند ولی هندسه‌ای فرای فضای عادی سه بعدی نمی‌شناسیم. با الهام گرفتن از ارتباط فوق برای $n \leq 3$ ، مفاهیم هندسی را برای \mathbb{R}^n ، یعنی مجموعه n -تایی‌های مرتب اعداد حقیقی، تعریف می‌کنیم. به این ترتیب نوعی هندسه در \mathbb{R}^n بنا می‌شود.

با این مقدمه، \mathbb{R}^n ، مجموعه n -تایی‌های مرتب اعداد حقیقی، یعنی اشیاء ریاضی $x_i \in \mathbb{R}$ ، $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ را در نظر می‌گیریم و هرچنین x را یک نقطه \mathbb{R}^n می‌نامیم. نخست یک عمل جمع در \mathbb{R}^n مشابه جمع بردارها در \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 تعریف می‌کنیم. برای $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ و $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad (۳)$$

(۱-۱) خواص جمع

(۱-۱-۱) خاصیت تعویض پذیری (جابجایی): $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.

(۱-۱-۲) خاصیت شرکت پذیری $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$.

(۱-۱-۳) عنصر بی اثر: n تایی $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ (یگانه عنصر) دارای ویژگی زیر است:

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

(۱-۱-۴) عنصر قرینه: برای n تایی داده شده $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ، n تایی $-\mathbf{x}$ که به صورت

$-\mathbf{x} = (-x_1, \dots, -x_n)$ تعریف می شود (یگانه عنصر) دارای ویژگی زیر است:

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

خواص فوق همه به سادگی از تعریف نتیجه می شوند.

تعریف جمع n تایی ها و خواص بالا عیناً از حالت دو بعدی و سه بعدی برگرفته شده اند. اگر به نقاط $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ و $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ در \mathbb{R}^3 ، بردارهای ساطع از $\mathbf{0}$ به این نقاط را منسوب کنیم، $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ مفهوم مجموع برداری معمول را دارد یعنی رأس چهارم متوازی الاضلاعی که سه رأس دیگر آن نقاط $\mathbf{0}$ ، \mathbf{x} و \mathbf{y} هستند.

شکل ۳

برای بردارها در صفحه و فضای سه بعدی، حاصل ضرب یک عدد حقیقی در بردار نیز تعریف شده است. این عمل را می توان در \mathbb{R}^n نیز تعریف کرد. برای نقطه $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ و عدد حقیقی $r \in \mathbb{R}$ ، نقطه $r\mathbf{x}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$r\mathbf{x} = (rx_1, \dots, rx_n) \quad (۴)$$

یعنی همه مؤلفه های \mathbf{x} در r ضرب می شوند. تعبیر این عمل در \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 را یادآوری می کنیم. اگر بردار واصل از $\mathbf{0}$ به \mathbf{x} را در نظر بگیریم، $r\mathbf{x}$ برداری در همان راستاست که اگر r مثبت باشد همجهت با \mathbf{x} و اگر r منفی باشد در جهت مقابل است.

شکل ۴

خواص ابتدایی زیر را در مورد ضرب در اعداد و ارتباط آن با عمل جمع ثابت می‌کنیم. همه این احکام نتیجهٔ سراسر تعریف هستند:

(۲-۱) خواص ضرب در اعداد

$$(۱-۲-۱) \quad 1x = x, x \text{ هر نقطه}$$

$$(۲-۲-۱) \quad \text{اگر } r, s \text{ اعداد حقیقی باشند و } x \text{ یک نقطه، } (rs)x = r(sx).$$

$$(۳-۲-۱) \quad \text{اگر } r, s \text{ اعداد حقیقی باشند و } x \text{ یک نقطه، } (r+s)x = (rx) + (sx).$$

$$(۴-۲-۱) \quad \text{اگر } r \text{ عدد حقیقی باشد و } x, y \text{ دو نقطه، } r(x+y) = (rx) + (ry).$$

با این تعاریف اکنون آماده هستیم مفاهیم هندسه را در \mathbb{R}^n پیاده کنیم. ساده‌ترین مفهوم هندسی پس از نقطه، «خط راست» است. برای تعریف خط راست در هندسهٔ تحلیلی دو بعدی و سه بعدی راه‌های گوناگون هست. باید تعریفی را مبنا قرار دهیم که بتوان با صرفاً مفاهیم جمع نقاط و ضرب در یک عدد حقیقی آن را بیان کرد، در این صورت چون این مفاهیم در \mathbb{R}^n معنی دارند همان تعریف را می‌توان در \mathbb{R}^n اتخاذ کرد. چنین تعریفی از خط راست را می‌توان در \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 در نظر گرفت.

فرض کنید a و A دو نقطه در \mathbb{R}^2 یا \mathbb{R}^3 باشند به طوری که $a \neq A$. a را به صورت یک نقطه و A را به صورت یک بردار (ساطع از مبدأ) تصور کنید. چون $a \neq A$ فرض شده است مضارب حقیقی A یک راستا تعریف می‌کنند. حال خط راستی را در نظر بگیرید که از a می‌گذرد و موازی این راستا است. شرط لازم و کافی برای این که یک نقطه روی این خط باشد این است که بتوان آن را به صورت $a + tA$ ، برای عدد حقیقی مناسب t ، نوشت (شکل ۵).

شکل ۵

در تعریف نقاط این خط به شکل $a + tA$ ، فقط دو عمل ذکر شده، ضرب در عدد حقیقی و جمع، به کار رفته است پس می‌توان آن را مبنا تعریف خط راست در \mathbb{R}^n قرارداد.

(۳-۱) تعریف. فرض کنید $a, A \in \mathbb{R}^n$, $A \neq \underline{0}$ ، داده شده باشند، در این صورت مجموعه زیر یک خط راست در \mathbb{R}^n خوانده می‌شود:

$$\langle a; A \rangle = \{a + tA \mid t \in \mathbb{R}\} \quad (5)$$

$\langle a; A \rangle$ را به مناسبت مقدمه بالا اصطلاحاً خط راست گذرا از a به موازات A نیز می‌نامیم هرچند که هنوز مفهوم "موازی" تعریف نشده است. بدین ترتیب هر نقطه $x = (x_1, \dots, x_n)$ از مجموعه بالا باید به شکل زیر باشد:

$$\begin{aligned} x &= a + tA \\ (x_1, \dots, x_n) &= (a_1, \dots, a_n) + t(A_1, \dots, A_n) \\ &= (a_1 + tA_1, \dots, a_n + tA_n) \end{aligned}$$

پس برای a و A داده شده، خط راست $\langle a; A \rangle$ متشکل از نقاط $x = (x_1, \dots, x_n)$ به شکل زیر است:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + tA_1 \\ \vdots \\ x_n = a_n + tA_n \end{cases} \quad (6)$$

که در اینجا t همه مقادیر حقیقی را اتخاذ می‌کند. (۶) را نمایش پارامتری خط راست $\langle a; A \rangle$ نیز می‌نامند. توجه کنید که هر خط راست، به مفهوم تعریف شده، همان طور که انتظار می‌رود، در تناظر یک به یک با اعداد حقیقی است. هر نقطه $\langle a; A \rangle$ ، به شکل $a + tA$ ، یعنی متناظر با t است، و این t منحصر به فرد است زیرا که اگر $a + tA = a + t'A$ ، با جمع کردن " $-a$ " با دو طرف نتیجه می‌شود که $tA = t'A$ و $(t - t')A = \underline{0}$. حال چون $A \neq \underline{0}$ فرض شده است، لزوماً $t - t' = 0$ یا $t = t'$.

مثال (محورهای مختصات). n تایی‌های e_1, \dots, e_n را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0) \quad , \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \quad , \dots \quad , \quad e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

بدین ترتیب e_i آن n تایی است که مؤلفه i آن ۱ و سایر مؤلفه‌هایش صفر است. حال

$$\langle \underline{0}; e_i \rangle = \{(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

یک خط راست است که محور مختصاتی i -ام یا محور x_i خوانده می‌شود. تعداد محورهای مختصات در \mathbb{R}^n برابر n است.

اگر $l = \langle a; A \rangle$ یک خط راست باشد، خط راست $\langle \underline{0}; A \rangle$ را انتقال یافته l به مبدأ می‌نامیم و با نمادهای l° یا $\langle A \rangle$ نیز نمایش می‌دهیم. داریم

$$l^\circ = \langle A \rangle = \{tA \mid t \in \mathbb{R}\}$$

(۴-۱) گزاره. برای هر $B \in l^\circ$ که $B \neq \underline{0}$ و هر $b \in l$ داریم:

$$\langle b; B \rangle = \langle a; A \rangle$$

اثبات. اگر $B \in l^\circ$ ، $B \neq \underline{0}$ ، داریم $B = t_0 A$ برای عدد حقیقی مناسب $t_0 \neq 0$ ، و اگر $b \in l$ ، $b = a + t_1 A$ برای عدد حقیقی مناسب t_1 ، پس برای هر عنصر $b + sB$ ، $s \in \mathbb{R}$ ، در $\langle b; B \rangle$ داریم:

$$b + sB = a + t_1 A + s(t_0 A) = a + (t_1 + st_0)A$$

پس $\langle b; B \rangle \subset \langle a; A \rangle$. بالعکس اگر نقطه‌ای $a + tA$ در نظر بگیریم، می‌توان $t = t_1 + st_0$ را برای s حل کرد چون فرض کرده‌ایم $t_0 \neq 0$ و هر نقطه $\langle a; A \rangle$ به $\langle b; B \rangle$ متعلق است. پس $\langle a; A \rangle \subset \langle b; B \rangle$. \square

حال این سؤال را مطرح می‌کنیم که مفهوم "خط راست" به صورتی که تعریف شد تا چه حد به خط راستی که در فضای مائوس سه بعدی می‌شناسیم نزدیک است؟ از آنجا که خط راست در \mathbb{R}^3 واقع انتقال یافته همه مضارب حقیقی یک A ثابت به وسیله یک بردار ثابت a است، انتظار داریم همان خواص اساسی برقرار باشند. به عنوان نمونه یک انتظار ابتدایی را ثابت می‌کنیم:

(۵-۱) گزاره. دو خط راست که دو نقطه مشترک متمایز داشته باشند بر هم منطبقند.

اثبات. فرض کنید $\langle a; A \rangle$ و $\langle b; B \rangle$ دو خط راست باشند، و $P \neq Q$ دو نقطه که متعلق به هر دو خط است. طبق (۴-۱) $\langle a; A \rangle = \langle P; A \rangle$ و $\langle b; B \rangle = \langle P; B \rangle$ چون P روی هر دو خط قرار دارد، پس:

$$Q = P + tA \quad \text{برای } t \in \mathbb{R} \text{ مناسب}$$

$$Q = P + sB \quad \text{برای } s \in \mathbb{R} \text{ مناسب}$$

پس $tA = sB$. ضمناً $s \neq 0$ و $t \neq 0$ زیرا که فرض کرده‌ایم $P \neq Q$. بنابراین از $tA = sB$ نتیجه می‌گیریم که B مضربی ناصفر از A است. طبق (۴-۱) خط راست $\langle a; A \rangle = \langle P; A \rangle$ برابر می‌شود با $\langle P; B \rangle$ که همان $\langle b; B \rangle$ است و حکم به اثبات می‌رسد. \square

دو خط راست l_1, l_2 را موازی می‌نامیم در صورتی که نقطهٔ مشترک نداشته باشند و انتقال یافته آنها به مبدأ یکی باشد، $l_1^\circ = l_2^\circ$. بنابراین برای هر خط l که از o نگذرد، l موازی l° است. توازی دو خط l_1, l_2 را به $l_1 \parallel l_2$ نمایش می‌دهیم.

نمایش دیگری برای خطوط راست نمایش متقارن است که بدین صورت به دست می‌آید. اگر هر یک از روابط (۶) را برای t حل کرده نتایج را برابر قرار دهیم، حاصل می‌شود:

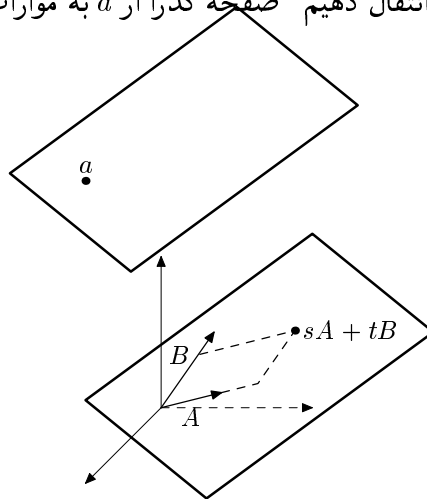
$$\frac{x_1 - a_1}{A_1} = \frac{x_2 - a_2}{A_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{A_n} \quad (7)$$

از آنجا که فرض شده است $0 \neq A$ ، همهٔ A_i ها نمی‌توانند صفر شوند. صفر شدن بعضی A_i ها در (۷) به منزلهٔ تقسیم بر صفر نیست، بلکه اگر به (۶) نگاه کنیم می‌بینیم که $A_i = 0$ به معنی این است که x_i ثابت و همواره برابر a_i می‌باشد.

مثال. فرض کنید $0 \neq A_1$ و $0 = A_2 = \dots = A_n$. در این صورت $A = (A, 0, \dots, 0)$ ، یعنی A متعلق به محور x_1 است. نتیجه این که خط راست $\langle a; A \rangle$ یا موازی محور x_1 است یا خود آن است. به همین ترتیب اگر $0 \neq A_j$ و سایر A_i ها صفر باشند، خط $\langle a; A \rangle$ موازی محور x_j یا منطبق بر آن خواهد بود.

زیرفضاهای مستوی (۱)

در جلسه قبل مفهوم نقطه و خط راست را که ابتدایی‌ترین مفاهیم هندسه‌اند در \mathbb{R}^n در نظر گرفتیم. گام بعدی ما تعریف یک "صفحه راست" (یا به طور خلاصه "صفحه") در \mathbb{R}^n است ($n \geq 2$). یادآوری می‌کنیم که "خط گذرا از a به موازات A "، $A \neq \mathbf{0}$ ، این گونه تعریف شد که نخست مضارب حقیقی A را در نظر گرفتیم، که یک "خط گذرا از $\mathbf{0}$ در راستای A " تشکیل می‌دهند، و سپس با انتقال این خط با مقدار ثابت a ، "خط گذرا از a به موازات A " به دست آمد. برای تعریف صفحه به طریق مشابه عمل می‌کنیم. فرض کنید A, B دو n تایی ناهمراستا باشند یعنی هیچ‌یک مضرب حقیقی دیگری نباشد. نخست مجموعه نقاط به شکل $sA + tB$ را در نظر می‌گیریم. تصور شهودی ما از این مجموعه، صفحه گذرا از مبدأ و شامل نقاط A و B است. توجه کنید که به ازای $s = t = 0$ ، مبدأ به دست می‌آید، به ازای $s = 1, t = 0$ ، نقطه A و به ازای $s = 0, t = 1$ ، نقطه B . حال اگر نقطه‌ای a در نظر بگیریم و همه نقاط این مجموعه را به اندازه a انتقال دهیم "صفحه گذرا از a به موازات A و B " حاصل می‌شود.



بدین ترتیب تعریف می‌کنیم

$$\langle a; A, B \rangle = \{a + sA + tB \mid s, t \in \mathbb{R}\} \quad (1)$$

این مجموعه را صفحه گذرا از a به موازات A و B می‌نامیم.

مثال ۱ (صفحات مختصاتی). در $\{1, \dots, n\}$ به تعداد $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ زوج اندیس $\{i, j\}$ ، $i \neq j$ وجود دارد. به ازای هر مجموعه $\{i, j\}$

$$\{se_i + te_j \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

یک صفحه مختصاتی در \mathbb{R}^n است.

اگر E یک صفحه در \mathbb{R}^n باشد، $E = \langle a; A, B \rangle$ ، E° یا انتقال یافته E به مبدأ را به صورت

$$E^\circ = \langle \underline{0}; A, B \rangle$$

تعریف می‌کنیم. گاهی به جای $\langle \underline{0}; A, B \rangle$ می‌نویسیم $\langle A, B \rangle$. اگر E_1 و E_2 هر یک خط یا صفحه باشد، E_1 و E_2 را موازی می‌نامیم و می‌نویسیم $E_1 \parallel E_2$ مشروط بر این که اشتراک E_1 و E_2 تهی باشد و به علاوه:

$$E_2 \subset E_1 \quad \text{یا} \quad E_1 \subset E_2$$

مثال ۲. اگر E یک صفحه در \mathbb{R}^n باشد و $\underline{0} \notin E$ نشان می‌دهیم $E \parallel E^\circ$. باید نشان دهیم E و E° نقطه مشترک ندارند. فرض کنید $E = \langle a; A, B \rangle$ ، پس $E^\circ = \langle \underline{0}; A, B \rangle$. اگر نقطه مشترکی وجود داشته باشد، مثلاً P ، آنگاه $P = a + s_1A + t_1B$ برای s_1 و t_1 مناسب، و نیز $P = s_2A + t_2B$ برای s_2 و t_2 مناسب، پس $a + s_1A + t_1B = s_2A + t_2B$ یا

$$a = (s_2 - s_1)A + (t_2 - t_1)B \quad (2)$$

در نتیجه می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\underline{o} &= (s_2 - s_1)A + (t_2 - t_1)B + (s_1 - s_2)A + (t_1 - t_2)B \\ &= a + (s_1 - s_2)A + (t_1 - t_2)B\end{aligned}$$

یعنی $\underline{o} \in E$ که خلاف فرض است.

مثال ۳. اگر $E = \langle a; A, B \rangle$ یک صفحه باشد، $b \notin E$ و $L = \langle b; B \rangle$ ، آنگاه خط L با صفحه E موازی است زیرا که اولاً $E^\circ = \langle \underline{o}; A, B \rangle \subset \langle \underline{o}; B \rangle = L^\circ$ ، و ثانیاً نشان می‌دهیم L و E نقطه مشترک ندارند. فرض کنید P یک نقطه مشترک باشد، پس $P = b + tB$ و نیز $P = a + s_1A + t_1B$ ،

بنابراین

$$b + tB = a + s_1A + t_1B$$

$$b = a + s_1A + (t_1 - t)B$$

یعنی $b \in E$ که خلاف فرض است.

مثال ۴. در \mathbb{R}^3 ، اگر دو صفحه نقطه مشترک نداشته باشند، لزوماً موازی‌اند. این وضعیت در \mathbb{R}^n ، برای $n \geq 4$ ، لزوماً حاکم نیست، یعنی دو صفحه فاقد نقطه مشترک ممکن است موازی نباشند! مثال زیر را در \mathbb{R}^4 در نظر بگیرید:

$$E_1 = \langle \underline{o}; e_1, e_2 \rangle \quad , \quad E_2 = \langle e_4; e_1, e_3 \rangle$$

E_1 متشکل از نقاط به شکل $(s, t, 0, 0)$ است و E_2 متشکل از نقاط به صورت $(s', 0, t', 1)$. بدیهی است که E_1 و E_2 نقطه مشترک ندارند زیرا که مؤلفه چهارم هر عنصر E_1 صفر است و مؤلفه چهارم هر عنصر E_2 برابر ۱ می‌باشد. حال اگر E_1 و E_2 را به مبدأ منتقل کنیم، داریم

$$E_1^\circ = E_1 = \{(s, t, 0, 0) \mid s, t \in \mathbb{R}\} \quad , \quad E_2^\circ = \{(s', 0, t', 0) \mid s', t' \in \mathbb{R}\}$$

که نه E_1° زیرمجموعه E_2° است و نه بالعکس، پس E_1 و E_2 در تعریف توازی صدق نمی‌کنند. دو صفحه در \mathbb{R}^n ، $n \geq 4$ ، را که نه نقطه مشترک داشته باشند و نه موازی باشند، دو صفحه متنافر می‌نامیم.

در اینجا می‌توان گزاره‌هایی مشابه گزاره‌های (۱-۴) و (۱-۵) جلسه قبل ثابت کرد به این مضمون که:

(۱) اگر $E = \langle a; A, B \rangle$ ، C و D دو عنصر ناهمراستای E° باشند و $b \in E$ ، آنگاه $E = \langle b; C, D \rangle$.

(۲) اگر P, Q, R سه نقطه متمایز و ناهمراستای مشترک بین دو صفحه E_1 و E_2 باشند، آنگاه $E_1 = E_2$.

چون به زودی احکام کلی‌تری ثابت خواهیم کرد در حال حاضر اثبات این دو حکم را به دانشجویان واگذار می‌کنیم و به معرفی مفاهیم جدیدی فرای خط و صفحه می‌پردازیم. تصور ذهنی ما از خط و صفحه، اشکال مسطح "یک بعدی" و "دو بعدی" است. هنوز تعریفی دقیق از کلمه "بعد" ارائه نکرده‌ایم و لیکن می‌دانیم که نقاط خط با یک پارامتر t در مجموعه $\{a + tA \mid t \in \mathbb{R}\}$ مدرج می‌شوند و نقاط یک صفحه با دو پارامتر s, t در مجموعه $\{a + sA + tB \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. به طور شهودی می‌توان تعداد پارامترهای حقیقی مستقل لازم برای تمیز دادن نقاط یک مجموعه را "بعد" آن مجموعه تلقی کرد. این مفهوم را به طور دقیق‌تر ضمن معرفی "زیرفضاهای مستوی k -بعدی در \mathbb{R}^n "، $k \leq n$ ، که تعمیم خط و صفحه به عنوان "اشیاء مسطح k -بعدی" خواهند بود، بررسی خواهیم کرد.

فرض کنید می‌خواهیم در \mathbb{R}^n ، $n \geq 3$ ، تعریفی برای اشیاء سه‌بعدی مسطح مشابه خط و صفحه دو بعدی تعریف کنیم. طبیعی است که نخست مجموع‌های به شکل $rA + sB + tC$ ، r, s, t اعداد حقیقی را در نظر بگیریم که در آن A, B و C سه تایی هستند. سپس اگر $a \in \mathbb{R}^n$ داده شده باشد، مجموعه انتقال یافته، یعنی $\{a + rA + sB + tC \mid r, s, t \in \mathbb{R}\}$ را "یک زیرفضای سه‌بعدی" در \mathbb{R}^n تلقی کنیم. نکته قابل توجه این که در مورد خط راست فرض کردیم $A \neq \underline{0}$ که در غیر این صورت مجموعه $\{a + tA \mid t \in \mathbb{R}\}$ به یک تک نقطه $\{a\}$ مبدل می‌شود. همین‌طور در مورد صفحه، فرض ناهمراستا بودن A و B را اعمال کردیم که در غیر این صورت مجموعه $\{a + sA + tB \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ به یک خط راست یا حتی یک نقطه (وقتی $A = B = \underline{0}$) مبدل می‌شود. حال می‌خواهیم شرطی مناسب برای سه تایی (یا حتی به طور کلی k ، تایی) بیابیم که تعمیم طبیعی صفر نبودن A در $\{A\}$ و ناهمراستا بودن A و B در $\{A, B\}$ باشد.

(۲-۱) تعریف. فرض کنید A_1, \dots, A_k عناصر \mathbb{R}^n باشند. مجموعه $\{A_1, \dots, A_k\}$ را مستقل خطی می‌نامیم در صورتی که هیچ مجموع مضارب حقیقی A_1, \dots, A_k ، یعنی $t_1 A_1 + \dots + t_k A_k$ ، صفر نشود مگر این که همه ضرایب t_1, \dots, t_k صفر باشند. اگر مجموعه $\{A_1, \dots, A_k\}$ مستقل خطی نباشند، آن را وابسته خطی می‌نامیم. هر مجموع به شکل $t_1 A_1 + \dots + t_k A_k$ یک ترکیب خطی A_1, \dots, A_k خوانده می‌شود.

مثال ۱. برای $k = 1$ ، مجموعه $\{A\}$ وابسته خطی خواهد بود به شرطی که $tA = \underline{0}$ بتواند برقرار باشد بدون این که $t = 0$. این تنها وقتی میسر است که $A = \underline{0}$. پس شرط اعمال شده برای تعریف خط راست $\langle a; A \rangle$ روی A (یعنی $A \neq \underline{0}$) معادل این است که $\{A\}$ مستقل خطی است.

مثال ۲. برای $k = 2$ ، وابستگی خطی مجموعه دو عنصری $\{A, B\}$ معادل این است که $t_1 A + t_2 B = \underline{0}$ بدون این که هر دو t_1 و t_2 صفر شوند. مثلاً اگر $t_1 \neq 0$ ، آنگاه $A = -\frac{t_2}{t_1} B$ ، یعنی A مضربی حقیقی از B خواهد شد. بدین ترتیب در تعریف صفحه $\langle a; A, B \rangle$ شرط همراستا نبودن A و B را می‌توان بدین صورت بیان کرد که $\{A, B\}$ مستقل خطی است.

مثال ۳. اگر در مجموعه $\{A_1, \dots, A_k\}$ ، یک یا بیشتر از A_i ها n -تایی صفر، $\underline{0}$ ، باشد، مجموعه، وابسته خطی می‌شود. مثلاً فرض کنید $A_j = \underline{0}$. ضرایب t_i را این طور در نظر بگیرید:

$$t_i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

در این صورت $t_1 A_1 + \dots + t_k A_k = \underline{0}$ بدون این که همه A_i ها صفر باشند.

(۲-۲) گزاره. شرطی لازم و کافی برای وابستگی خطی $\{A_1, \dots, A_k\}$ بدین شرح است:

(الف) در حالت $k = 1$ ، $\{A_1\}$ وابسته خطی است اگر و تنها اگر $A_1 = \underline{0}$.

(ب) در حالت $k > 1$ ، $\{A_1, \dots, A_k\}$ وابسته خطی است اگر و تنها اگر بتوان یکی از A_i ها را به صورت ترکیبی خطی از سایر A_i ها نوشت.

اثبات. حالت $k = 1$ در مثال 1 بالا بررسی شد، فرض کنید $k \geq 2$. اگر $\{A_1, \dots, A_k\}$ وابسته خطی باشد، t_1, \dots, t_k حقیقی وجود دارند، نه همه صفر، که $t_1 A_1 + \dots + t_k A_k = \underline{0}$ مثلاً $t_j \neq 0$. در این صورت

$$A_j = -\frac{t_1}{t_j} A_1 - \dots - \frac{t_{j-1}}{t_j} A_{j-1} - \frac{t_{j+1}}{t_j} A_{j+1} - \dots - \frac{t_n}{t_j} A_n$$

یعنی A_j ترکیبی خطی از سایر A_i ها است.

بالعکس اگر داشته باشیم:

$$A_j = c_1 A_1 + \dots + c_{j-1} A_{j-1} + c_{j+1} A_{j+1} + \dots + c_k A_k$$

با انتقال A_j به طرف دیگر رابطه داریم

$$c_1 A_1 + \dots + c_{j-1} A_{j-1} - A_j + c_{j+1} A_{j+1} + \dots + c_k A_k = \underline{0}$$

□ و این در حالی است که دست کم یکی از ضرایب (ضریب A_j) صفر نیست.

با این مقدمه، زیرفضاهای با بعد بالاتر از 1 و 2 در \mathbb{R}^n به صورت زیر تعریف می شود. فرض کنید $\{A_1, \dots, A_k\}$ یک مجموعه مستقل خطی از عناصر \mathbb{R}^n باشد و $a \in \mathbb{R}^n$ یک نقطه داده شده، در این صورت مجموعه زیر یک زیرفضای مستوی k -بعدی ("زیرفضای مستوی k -بعدی گذرا از a به موازات A_1, \dots, A_k ") خوانده می شود:

$$\langle a; A_1, \dots, A_k \rangle = \{a + t_1 A_1 + \dots + t_k A_k \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\} \quad (3)$$

اگر مجموعه تعریف شده در (3) را به E نمایش دهیم، مقصود از E° (انتقال یافته E به $\underline{0}$)، مجموعه $\langle \underline{0}; A_1, \dots, A_k \rangle$ است. به طور کلی یک زیرفضای مستوی k -بعدی که شامل $\underline{0}$ باشد یک زیرفضای خطی خوانده می شود. طبق قرارداد، تنها زیرفضای صفر بعدی تک عنصری $\{\underline{0}\}$ است، و بدین ترتیب زیرفضاهای مستوی صفر بعدی تک عنصری های $\{a\}$ هستند، $a \in \mathbb{R}^n$ ، که

از انتقال \underline{e} به a به دست می آیند. بدین ترتیب جدول زیر را داریم:

زیرفضای مستوی صفر بعدی \longleftrightarrow نقطه

زیرفضای مستوی یک بعدی \longleftrightarrow خط

زیرفضای مستوی دو بعدی \longleftrightarrow صفحه

⋮

تعریف زیرفضای k -بعدی جای تأمل دارد. سؤال‌های متعددی می‌توان این مقطع مطرح کرد. آیا عدد k به طور منحصر به فرد تعیین می‌شود، یعنی اگر $\{A_1, \dots, A_k\}$ و $\{B_1, \dots, B_l\}$ دو مجموعه، هر یک مستقل خطی، باشند، آیا می‌توان رابطه‌ای به شکل $\langle a; A_1, \dots, A_k \rangle = \langle b; A_1, \dots, A_k \rangle$ ، برای a و b مناسب، برقرار ساخت بدون این که $k = l$ ؟ به چه اعتباری زیرمجموعه‌های $\langle a; A_1, \dots, A_k \rangle$ را "مسطح" تجسم می‌کنیم؟ همان طور که دو خط راست دارای دو نقطه متمایز مشترک بر هم منطبق می‌شوند، آیا دو زیرفضای مستوی k -بعدی با $(k+1)$ نقطه مشترک، لزوماً بر هم منطبق‌اند؟ در باقیمانده این جلسه و جلسه بعد به جواب‌های قاطعی در مورد این گونه سؤال‌ها خواهیم رسید.

(۲-۳) گزاره. فرض کنید $\{A_1, \dots, A_k\}$ مستقل خطی ست و $a \in \mathbb{R}^n$ ، در این صورت نمایش عناصر $\langle a; A_1, \dots, A_k \rangle$ به شکل $a + t_1 A_1 + \dots + t_k A_k$ منحصر به فرد است.

اثبات. توجه کنید که هر عنصر $\langle a; A_1, \dots, A_k \rangle$ طبق تعریف به شکل $a + t_1 A_1 + \dots + t_k A_k$ برای t_1, \dots, t_k مناسب است. می‌خواهیم ثابت کنیم t_1, \dots, t_k به طور یگانه تعیین می‌شوند. فرض کنید:

$$a + t_1 A_1 + \dots + t_k A_k = a + t'_1 A_1 + \dots + t'_k A_k$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که $(t_1 - t'_1)A_1 + \dots + (t_k - t'_k)A_k = \underline{e}$. از آنجا که $\{A_1, \dots, A_k\}$ مستقل خطی است نتیجه می‌شود که همه ضرایب صفر هستند، پس $t'_i = t_i$ برای $i = 1, \dots, k$ و یگانگی ضرایب به اثبات می‌رسد. \square

گزاره فوق نشان می‌دهد هر زیرفضای مستوی k -بعدی در تناظر یک به یک با مجموعه k -تایی‌های مرتب (t_1, \dots, t_k) ، یعنی مجموعه \mathbb{R}^k ، قرار می‌گیرد، همان طور که خط راست با \mathbb{R} و

صفحه با \mathbb{R}^2 مدرج می‌شود.

نکته زیر نیز در مورد مفهوم استقلال خطی مکرراً مورد استفاده قرار خواهد گرفت:

(۲-۴) گزاره. اگر مجموعه $\{A_1, \dots, A_k\}$ مستقل خطی باشد، هر زیرمجموعه ناتهی آن نیز مستقل خطی است. اگر $\{A_1, \dots, A_k\}$ وابسته خطی باشد، هر مجموعه شامل آن نیز وابسته خطی است.

اثبات. اگر زیرمجموعه‌ای از $\{A_1, \dots, A_k\}$ وابسته خطی شود، یک ترکیب خطی از اعضای آن زیرمجموعه برابر صفر می‌شود بدون آن که همه ضرایب صفر باشند. اگر سایر A_i ها را با ضریب صفر به این رابطه بیافزاییم یک رابطه وابسته خطی برای $\{A_1, \dots, A_k\}$ به دست می‌آید. همین طور اگر یک رابطه وابستگی خطی برای $\{A_1, \dots, A_k\}$ موجود باشد، همین رابطه، وابستگی خطی برای هر مجموعه شامل $\{A_1, \dots, A_k\}$ را نشان می‌دهد. \square

زیرفضاهای مستوی (۲)

در پایان جلسه قبل به تعدادی سؤال بنیادی در مورد تعریف زیرفضای مستوی k -بعدی اشاره کردیم که قرار شد به پاسخگویی کامل آنها اقدام کنیم. قضیه زیر و روش اثبات آن کلید این بحث است.

(۱-۳) قضیه تبادلی. فرض کنید $\{A_1, \dots, A_k\}$ و $\{B_1, \dots, B_l\}$ دو زیرمجموعه مستقل خطی

از عناصر \mathbb{R}^n باشند به طوری که $\langle B_1, \dots, B_l \rangle = \langle A_1, \dots, A_k \rangle$ در این صورت $l = k$.

اثبات. نشان می‌دهیم $l \neq k$ منجر به تناقض می‌شود. مثلاً فرض کنید $k \leq l$. چون

$$B_1 \in \langle B_1, \dots, B_l \rangle = \langle A_1, \dots, A_k \rangle$$
 می‌توان نوشت:

$$B_1 = t_1 A_1 + \dots + t_k A_k \quad (1)$$

دست کم یکی از ضرایب t_1, \dots, t_k باید ناصفر باشد چه در غیر این صورت $B_1 = \underline{0}$ و مجموعه $\{B_1, \dots, B_l\}$ نمی‌تواند مستقل خطی باشد. مثلاً فرض می‌کنیم $t_1 \neq 0$ (در صورت لزوم اندیس‌ها را تعویض کنید به طوری که ضریب با اندیس ۱ ناصفر باشد)، پس با تبادلی جای B_1 و $t_1 A_1$ در دو طرف (۱) داریم:

$$-t_1 A_1 = -B_1 + t_2 A_2 + \dots + t_k A_k \quad (2)$$

$$A_1 = \frac{1}{t_1} B_1 - \frac{t_2}{t_1} A_2 - \dots - \frac{t_k}{t_1} A_k$$

از (۲) نتیجه می‌شود که هر ترکیب خطی A_1, \dots, A_k ، یعنی هر عنصر $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$ ، ترکیبی خطی از $\{B_1, A_2, \dots, A_k\}$ است. حال عنصر $B_2 \in \langle B_1, \dots, B_l \rangle = \langle A_1, \dots, A_k \rangle$ را در نظر می‌گیریم.

چون ثابت کرده‌ایم هر عنصر $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$ ترکیبی خطی از $\{B_1, A_2, \dots, A_k\}$ است، می‌توان نوشت:

$$B_2 = s_1 B_1 + s_2 A_2 + \dots + s_k A_k \quad (3)$$

در اینجا همه ضرایب s_2, \dots, s_k نمی‌توانند صفر باشند زیرا در این صورت $B_2 = s_1 B_1$ و مجموعه $\{B_1, \dots, B_l\}$ وابسته خطی خواهد شد که خلاف فرض قضیه است. پس دست کم یکی از s_2, \dots, s_k صفر نیست که مثلاً (با تعویض نام اندیس‌ها در صورت لزوم) فرض می‌کنیم $s_2 \neq 0$. پس مجدداً با تبادل مکان B_2 و $s_2 A_2$ داریم:

$$\begin{aligned} -s_2 A_2 &= -s_1 B_1 - B_2 + s_3 A_3 + \dots + t_k A_k \\ A_2 &= -\frac{s_1}{s_2} B_1 - \frac{1}{s_2} B_2 - \frac{s_3}{s_2} A_3 - \dots - \frac{s_k}{s_2} A_k \end{aligned} \quad (4)$$

این رابطه نشان می‌دهد که هر ترکیب خطی B_1, A_2, \dots, A_k (در نتیجه هر ترکیب خطی $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$) ترکیبی خطی از $\{B_1, B_2, A_3, \dots, A_k\}$ است. به همین روش ادامه داده، تک تک A_i ها را با B_i ها مبادله می‌کنیم. از آنجا که $k \leq l$ ، پس از k مرحله به این نتیجه می‌رسیم که هر ترکیب خطی A_1, \dots, A_k یک ترکیب خطی B_1, \dots, B_k است. از آنجا که $\langle B_1, \dots, B_l \rangle = \langle A_1, \dots, A_k \rangle$ ، اگر l اکیداً بزرگتر از k باشد، B_{k+1} باید ترکیبی خطی از B_1, \dots, B_k باشد که این خلاف استقلال خطی $\{B_1, \dots, B_l\}$ است. نتیجه این که $l = k$ و حکم به اثبات می‌رسد. \square

قضیه تبادل نشان می‌دهد که اگر یک زیرفضای خطی E° متشکل از ترکیب‌های خطی یک مجموعه مستقل خطی $\{A_1, \dots, A_k\}$ باشد، هر مجموعه مستقل خطی دیگر که ترکیب‌های خطی عناصر آن همین مجموعه را ایجاد کند باید دارای دقیقاً k عضو باشد. بدین ترتیب عدد k ، که از این پس بعد زیرفضای خطی $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$ خوانده خواهد شد عددی است که به طور ذاتی بر این زیرفضای خطی تحمیل می‌شود. هر زیرمجموعه مستقل خطی k -عضوی $\{A_1, \dots, A_k\}$ از عناصر E° را یک پایه برای E می‌نامیم. اگر زیرفضای مستوی $E = \langle a; A_1, \dots, A_k \rangle$ از انتقال زیرفضای

خطی $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$ به دست آمده باشد، بعد E را نیز k می‌گیریم. اکنون می‌توانیم گزاره‌ای مشابه (۴-۱) در حالت کلی ارائه کنیم:

(۲-۳) گزاره. اگر $\{A_1, \dots, A_k\}$ مستقل خطی باشد $E = \langle a; A_1, \dots, A_k \rangle$ ، $\{B_1, \dots, B_k\}$ یک مجموعه مستقل خطی از عناصر $E^\circ = \langle A_1, \dots, A_k \rangle$ باشد، و $b \in E$ ، آنگاه $E = \langle b; B_1, \dots, B_k \rangle$.

اثبات. چون $b \in E$ داریم

$$b = a + t_1 A_1 + \dots + t_k A_k \quad (5)$$

برای اعداد حقیقی مناسب t_1, \dots, t_k . از طرفی دیگر دیدیم که هر ترکیب خطی $\{A_1, \dots, A_k\}$ یک ترکیب خطی $\{B_1, \dots, B_k\}$ است، و بالعکس. این امر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} x &= a + s_1 A_1 + \dots + s_k A_k \\ &= b + (s_1 - t_1) A_1 + \dots + (s_k - t_k) A_k \quad (\text{طبق } 5) \end{aligned} \quad (6)$$

و طبق (۶) می‌توان $(s_1 - t_1) A_1 + \dots + (s_k - t_k) A_k$ را به صورت ترکیبی خطی از B_1, \dots, B_k نوشت، پس $x \in \langle b; B_1, \dots, B_k \rangle$. بالعکس اگر $y \in \langle b; B_1, \dots, B_k \rangle$ ، آنگاه:

$$y = b + r'_1 B_1 + \dots + r'_k B_k \quad \text{برای اعداد حقیقی مناسب } r'_1, \dots, r'_k$$

ترکیب خطی $r'_1 B_1 + \dots + r'_k B_k$ را می‌توان طبق (۶) به صورت $r_1 A_1 + \dots + r_k A_k$ نوشت، پس به کمک (۵):

$$y = a + (t_1 + r_1) A_1 + \dots + (t_k + r_k) A_k$$

یعنی $y \in \langle a; A_1, \dots, A_k \rangle$ و حکم به اثبات می‌رسد. \square

گزاره زیر نیز مشابه (۱-۵) است:

(۳-۳) گزاره. اگر زیرفضاهای مستوی k -بعدی E_1, E_2 در \mathbb{R}^n دارای $(k+1)$ نقطهٔ مشترک

باشند که در یک زیرفضای با بعد کوچکتر از k در \mathbb{R}^k قرار نمی‌گیرند، آنگاه $E_1 = E_2$.

اثبات. فرض کنید P_0, P_1, \dots, P_k نقاط مشترک E_1, E_2 باشند. اگر $\{A_1, \dots, A_k\}$ یک پایه

برای E_1° باشد، عناصر E_1 را می‌توان به صورت

$$P_0 + t_1 A_1 + \dots + t_k A_k$$

نمایش داد. حال چون $P_1, \dots, P_k \in E$ هر یک به صورت فوق نوشته می‌شود،

پس $P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0$ هر یک ترکیبی خطی از A_1, \dots, A_k است. می‌نویسیم

$P'_1 = P_1 - P_0, \dots, P'_k = P_k - P_0$. حال ادعا می‌کنیم $\{P'_1, \dots, P'_k\}$ مستقل خطی است. نشان

می‌دهیم فرض وابستگی خطی $\{P'_1, \dots, P'_k\}$ منجر به تناقض با این فرض گزاره می‌شود که

P_0, P_1, \dots, P_k در یک زیرفضای با بعد کوچکتر از k جای نمی‌گیرند. اگر $k = 1$ که در حالت گزاره

(۵-۱) هستیم که قبلاً ثابت شده است، پس فرض می‌کنیم $k > 1$. حال فرض کنید $\{P'_1, \dots, P'_k\}$

وابسته خطی است. دست کم یکی از P'_1, \dots, P'_k ناصفر است زیرا اگر همهٔ اینها صفر باشند داریم

$P_0 = P_1 = \dots = P_k$ پس $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$ در یک زیرفضای مستوی صفر بعدی \mathbb{R}^n قرار می‌گیرد

که خلاف فرض است. بدین ترتیب $\{P'_1, \dots, P'_k\}$ دارای حداقل یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی است

(یک تک عنصری ناصفر). بزرگترین زیرمجموعه (از نظر تعداد اعضا) از $\{P'_1, \dots, P'_k\}$ را در نظر

می‌گیریم که مستقل خطی است، تعداد اعضای آن را l می‌نامیم. چنین زیرمجموعهٔ $\{P'_1, \dots, P'_k\}$

ممکن است منحصر به فرد نباشد ولیکن به هر حال $l < k$ زیرا $\{P'_1, \dots, P'_k\}$ وابسته خطی فرض شده

است. با تعویض نام اندیس‌ها در صورت لزوم، فرض می‌کنیم $\{P'_1, \dots, P'_l\}$ این زیرمجموعهٔ مستقل

خطی (دارای بیشترین تعداد ممکن عضو) باشد. زیرفضای خطی ایجاد شده توسط P'_1, \dots, P'_l را F°

می‌نامیم، $F^\circ = \langle P'_1, \dots, P'_l \rangle$. داریم $P_{l+1}, \dots, P_k \in F^\circ$ زیرا که افزودن هر یک به $\{P'_1, \dots, P'_l\}$

وابستگی خطی ایجاد می‌کند. F° یک زیرفضای خطی l -بعدی است، $l \leq k$ ، و اگر آن را با P_0

انتقال دهیم، یک زیرمجموعهٔ مستوی l -بعدی F به دست می آید:

$$F = \langle P_0; P'_1, \dots, P'_l \rangle$$

که $P_0, P_1 = P_0 + P'_1, \dots, P_k = P_0 + P'_k$ همه عضو آن هستند. چون $l < k$ ، این خلاف فرض گزاره است. نتیجه این که وابستگی خطی $\{P'_1, \dots, P'_k\}$ منجر به تناقض شد و این مجموعه باید مستقل خطی باشد. بنابراین $\{P'_1, \dots, P'_k\}$ یک پایه برای E_1° است و طبق گزاره (۳-۲) داریم

$$E_1 = \langle P_0; P'_1, \dots, P'_k \rangle$$

چون $P_0, P_1, \dots, P_k \in E_2$ ، عین همین استدلال برای E_2 نیز کار می کند و نتیجه می شود که:

$$E_2 = \langle P_0; P'_1, \dots, P'_k \rangle$$

و $E_1 = E_2$ نتیجه می شود. □

مفهوم توازی را که برای خط و صفحه تعریف کردیم می توانیم به زیرفضاهای مستوی از هر بعد تعمیم دهیم. فرض کنید E_1, E_2 دو زیرفضای مستوی \mathbb{R}^n باشند. می گوییم E_1, E_2 موازی هستند، و می نویسیم $E_1 \parallel E_2$ ، در صورتی که اشتراک E_1, E_2 تهی باشد و برای انتقال یافته های آنها به مبدأ، یعنی E_1°, E_2° ، داشته باشیم $E_1^\circ \subset E_2^\circ$ یا $E_2^\circ \subset E_1^\circ$.

مثال. وضعیت نسبی خط راست $l: \frac{x_1-2}{3} = \frac{x_2}{4} = \frac{x_3}{5} = \frac{x_4-1}{1} = \frac{x_5+2}{-1}$ را با زیرفضای سه بعدی $E = \langle e_3; e_1, e_4, e_5 \rangle$ از \mathbb{R}^5 بررسی کنید. عناصر E به شکل $(x_1, 0, 1, x_4, x_5)$ ، و برای نقاط l مؤلفه سوم صفر است، پس $l \cap E$ تهی است. داریم $l^\circ: \frac{x_1}{3} = \frac{x_2}{4} = \frac{x_3}{5} = \frac{x_4}{1} = \frac{x_5}{-1}$ و $E^\circ = \langle e_1, e_4, e_5 \rangle$ ، یعنی مؤلفه های دوم و سوم عناصر E° صفر هستند. حال نقطه $(1, 2, 0, 1, -1)$ روی l° قرار دارد ولی در E° نیست، پس $l^\circ \not\subset E^\circ$. از طرفی دیگر $E^\circ \not\subset l^\circ$ زیرا که بعد E° از بعد l° بزرگتر است. پس E و l موازی نیستند. E و l را مثل گذشته متنافر می نامیم.

ضرب داخلی و هندسه اقلیدسی در \mathbb{R}^n (۱)

تاکنون مفاهیم ابتدایی نقطه، خط، صفحه و ترازی را به \mathbb{R}^n تعمیم داده‌ایم. در هندسه مقدماتی طول و زاویه نیز نقش مهمی ایفا می‌کنند. هدف بعدی ما معرفی این مفاهیم در \mathbb{R}^n و بحث پیرامون موضوع‌های هندسی وابسته به آنهاست. برای این کار رابطه طول، زاویه و ضرب داخلی بردارها در \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 را یادآوری می‌کنیم و خاطر نشان می‌سازیم که هر دو مفهوم "طول" و "زاویه" را می‌توان برحسب ضرب داخلی بیان کرد. از این رو در \mathbb{R}^n ضرب داخلی را مبنای بحث قرار می‌دهیم.

اگر u, v دو بردار در \mathbb{R}^3 باشند اغلب حاصل ضرب داخلی آنها، $u \cdot v$ ، به صورت زیر تعریف

می‌شود:

$$u \cdot v = |u||v| \cos \alpha \quad (۱)$$

که $\alpha \in [0, \pi]$ زاویه بین u و v است و $|u|$ طول بردار را نمایش می‌دهد. با قرار دادن $u = v$ ، از (۱) نتیجه می‌شود که:

$$|u| = \sqrt{u \cdot u} \quad (۲)$$

یعنی طول بردار را می‌توان برحسب ضرب داخلی بیان کرد. حال اگر $u \neq 0$ و $v \neq 0$ ، به طوری که زاویه بین آنها، $\alpha \in [0, \pi]$ ، معنی داشته باشد، از (۱) می‌توان نوشت:

$$\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u} \sqrt{v \cdot v}} \quad (۳)$$

تابع کسینوس روی بازه $[0, \pi]$ یک به یک است و همه مقادیر ممکن برای کسینوس، یعنی اعداد بازه $[-1, 1]$ را (یک بار) اتخاذ می‌کند، پس تابع معکوس $\cos^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ وجود دارد و می‌توان نوشت:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u} \sqrt{v \cdot v}}\right) \quad (4)$$

بدین ترتیب مفهوم زاویه بین دو بردار نیز به کمک (4) از ضرب داخلی به دست می‌آید. حال اگر بتوان حاصل ضرب داخلی دو بردار را مستقل از "طول" و "زاویه" تعریف کرد، می‌توان با به کار گرفتن (2) و (4) به تعریف مفاهیم طول و زاویه رسید. در واقع در هندسه تحلیلی دو بعدی و سه بعدی عبارتی جبری برای حاصل ضرب داخلی به دست می‌آید (به کمک قضیه مثلثاتی "قاعده کسینوس") که این خواست را برآورده می‌کند. در \mathbb{R}^2 اگر $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ و $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ثابت می‌شود که:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad (5)$$

و نیز در \mathbb{R}^3 ، برای $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ و $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad (6)$$

عبارت‌های جبری (5) و (6) تعریف زیر را در \mathbb{R}^n القا می‌کنند:

(4-1) تعریف. برای $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ و $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ حاصل ضرب داخلی، $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ، به

صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

خواص زیر همه به سادگی از تعریف فوق نتیجه می‌شوند:

(4-2) خواص ابتدایی حاصل ضرب داخلی

(۱-۲-۴) برای هر $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.

(۲-۲-۴) برای هر $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$ و $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$.

(۳-۲-۴) برای هر $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ و هر $r \in \mathbb{R}$ $(r\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = r(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ و $\mathbf{u} \cdot (r\mathbf{v}) = r(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.

(۴-۲-۴) برای هر $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ و $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ اگر و تنها اگر $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

با توجه به (۴-۲-۴) و با الهام از (۲)، طول $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \quad (۷)$$

تنها n -تایی دارای طول صفر، $\mathbf{0}$ است. برای $|\mathbf{u}|$ ، علاوه بر طول، اصطلاح‌های نرم و قدر مطلق نیز به کار می‌رود. بعضی $|\mathbf{u}|$ را به $\|\mathbf{u}\|$ نمایش می‌دهند.

اکنون می‌خواهیم مفهوم زاویه بین \mathbf{u} و \mathbf{v} را نیز همانند (۴) تعریف کنیم. برای این کار باید اطمینان حاصل کرد که با تعریف ارائه شده در \mathbb{R}^n ، مقدار عبارت $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}}$ همواره در بازه $[-1, 1]$ قرار دارد.

(۳-۴) نامساوی کوشی-شوارتس. برای هر $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$$

به علاوه شرطی لازم و کافی برای برقراری تساوی این است که \mathbf{u} و \mathbf{v} همراستا باشند.

اثبات. نخست حالتی را در نظر بگیرید که \mathbf{u} و \mathbf{v} همراستا هستند. اگر یکی از \mathbf{u} و \mathbf{v} صفر باشد که دو طرف نامساوی بالا صفر می‌شود، در غیر این صورت $\mathbf{v} = r\mathbf{u}$ برای عدد حقیقی مناسب r . در این صورت هر دو طرف نامساوی به $|r| |\mathbf{u}|^2$ تبدیل می‌شود و تساوی برقرار است. حال فرض کنید \mathbf{u} و \mathbf{v} همراستا نباشند، بالاخص $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ و $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. n -تایی $\mathbf{v} - x\mathbf{u}$ ، $x \in \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. داریم

$xu + v \neq 0$ زیرا در غیر این صورت $v = -xu$ و همراستایی ایجاد می‌شود. پس:

$$(xu + v) \cdot (xu + v) > 0 \quad (\text{طبق } 4-2-4)$$

$$(xu) \cdot (xu) + (xu) \cdot v + v \cdot (xu) + (v \cdot v) > 0 \quad (\text{با استفاده مکرر از } 2-2-4)$$

$$(u \cdot u)x^2 + 2(u \cdot v)x + (v \cdot v) \quad (\text{با استفاده مکرر از } 3-2-4 \text{ و } 1-2-4)$$

این نامساوی درجه دوم نسبت به x برای هر عدد حقیقی x برقرار است، پس مبین عبارت منفی است:

$$(u \cdot v)^2 - (u \cdot u)(v \cdot v) < 0$$

یا

$$|u \cdot v|^2 < |u|^2 |v|^2$$

□ که نامساوی مورد نظر است.

حال با توجه به نامساوی ثبت شده داریم

$$-1 \leq \frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u} \sqrt{v \cdot v}} = \frac{u \cdot v}{|u||v|} \leq 1$$

ویگانه مقدار واقع در $[0, \pi]$ که کسینوس آن برابر $\frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u} \sqrt{v \cdot v}}$ است زاویه بین u و v می‌نامیم:

$$\angle(u, v) = \cos^{-1} \frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u} \sqrt{v \cdot v}} \quad (8)$$

قضیه زیر که از ابتدایی‌ترین قضایای هندسه است، از نامساوی کوشی-شوارتس نتیجه می‌شود:

(4-4) نامساوی مثلث برای هر $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی این است که یکی از u و v مضربی نامنفی از دیگری باشد.

اثبات. کافی است نامساوی برای مجذور دو طرف ثابت شود، یعنی:

$$|u + v|^2 \leq |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v|$$

که معادل است با

$$(u + v) \cdot (u + v) \leq (u \cdot u) + (v \cdot v) + 2|u||v|$$

و پس از ساده کردن:

$$u \cdot v \leq |u||v|$$

$$|u||v| \cos \angle(u, v) \leq |u||v| \quad (\text{طبق نتیجه نامساوی کوشی-شوارتس})$$

اگر u و v صفر باشد (که در این صورت یکی مضرب صفر از دیگری است) تساوی برقرار می‌شود، و اگر هر دو ناصفر باشند، رابطه بالا معادل است با:

$$\cos \angle(u, v) \leq 1$$

که همواره برقرار است. تساوی در صورتی حاصل می‌شود که $\cos \angle(u, v) = 1$ ، یعنی u و v همراستا و هم جهت باشند. \square

برای دو عنصر u و v از \mathbb{R}^n می‌نویسیم $u \perp v$ ، و می‌گوییم u بر v عمود است در صورتی که $u \cdot v = 0$. قضیه فیثاغورس که پایه هندسه اقلیدسی است در \mathbb{R}^n با تعاریف طول و زاویه ذکر شده برقرار است:

(۴-۵) قضیه فیثاغورس. هرگاه برای $u, v \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $u \perp v$ ، آنگاه:

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2$$

اثبات. عبارت بالا را می‌توان به صورت

$$(u + v) \cdot (u + v) = (u \cdot u) + (v \cdot v)$$

نوشت که با توجه به $u \cdot v = 0$ برقرار است. \square

توجه کنید که با همین استدلال (یا جایگزینی $-v$ به جای v)، رابطه $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$ نیز تحت فرض $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ برقرار است. در \mathbb{R}^n نیز، مانند \mathbb{R}^2 ، قضیه فیثاغورس به شکل $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$ حالت خاص قاعده کسینوس است که می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad v \neq \mathbf{0}, u \neq \mathbf{0} \quad (9)$$

این نیز از محاسبه‌ای مشابه محاسبه بالا با استفاده از (8) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ &= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \\ &= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (\text{طبق (8)}) \end{aligned}$$

به طور کلی، هرگاه $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ و $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ دو عنصر \mathbb{R}^n باشند، فاصله \mathbf{x} از \mathbf{y} ، که گاهی به $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ نمایش داده می‌شود، برابر $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ تعریف می‌شود. این تعریف با آنچه از بردارها در \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 می‌دانیم سازگار است. قضیه‌های هندسی اخیر را می‌توانیم با توجه به این تعریف به صورت‌های آشناتری نیز ارائه کنیم:

(4-6) نامساوی مثلث. برای $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ در \mathbb{R}^n :

$$|\mathbf{y} - \mathbf{z}| \leq |\mathbf{y} - \mathbf{x}| + |\mathbf{x} - \mathbf{z}|$$

(4-7) قضیه فیثاغورس. هرگاه برای $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ در \mathbb{R}^n داشته باشیم $(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \perp (\mathbf{x} - \mathbf{z})$ ، آنگاه:

$$|\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2 = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2 + |\mathbf{z} - \mathbf{x}|^2$$

(4-8) قاعده کسینوس. برای هر $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ در \mathbb{R}^n داریم:

$$|\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2 = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2 + |\mathbf{z} - \mathbf{x}|^2 - 2|\mathbf{y} - \mathbf{x}||\mathbf{z} - \mathbf{x}| \cos \angle(\mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{z} - \mathbf{x})$$

هریک از این روابط با جایگزینی در رابطه متناظر به دست می آید. در (۶-۴) بنویسید $u = y - x$ و $v = x - z$ ، آنگاه $u + v = y - z$. در مورد (۷-۴) و (۸-۴)، می نویسیم $u = y - x$ و $v = z - x$ ، آنگاه $u - v = y - z$.

(۹-۴) تصویر قائم روی یک راستا. یکی از موارد استفاده مهم ضرب داخلی در \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 محاسبه تصویر قائم یک بردار روی راستایی است که یک بردار ناصفر دیگر پدید می آورد (شکل ۱).

شکل ۱

اگر $u \neq 0$ و $v \neq 0$ در \mathbb{R}^3 باشند، u' تصویر قائم u بر راستای v ، برداری است که طول آن برابر $|u| \cos \angle(u, v)$ است (در حالتی که $u = 0$ ، این طول برابر صفر در نظر گرفته می شود هرچند که زاویه بین u, v تعریف نشده است)، u' مضربی از v است، $u' = ru$ ، و علامت r با علامت کسینوس زاویه بین u و v یکی است. بدین ترتیب اگر $\frac{v}{|v|}$ بردار واحد در جهت v باشد، می توان نوشت:

$$u' = |u| \cos \angle(u, v) \frac{v}{|v|} \quad (10)$$

یا معادلاً:

$$u' = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v \quad (11)$$

با توجه به این که عبارتهای سمت راست (۱۱) همه در \mathbb{R}^n معنی دارند، می توانیم تصویر قائم u بر $v \neq 0$ در \mathbb{R}^n را نیز به صورت (۱۱) تعریف کنیم. در حالت خاصی که v یک بردار واحد باشد:

$$|v| = 1 \quad u' = (u \cdot v)v \quad (12)$$

مثال (پایه متداول \mathbb{R}^n). e_1, \dots, e_n را مانند مثال صفحه ۸ جلسه قبل در نظر بگیرید، یعنی

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

هر $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ را می‌توان به صورت:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

نوشت. در واقع $x_i e_i$ تصویر قائم \mathbf{x} بر راستای e_i (محور i ام) است:

$$(x \cdot e_i) e_i = x_i e_i$$

پس می‌توان نوشت:

$$x = \sum_{i=1}^n (x \cdot e_i) e_i \quad (13)$$

مجموعه $\{e_1, \dots, e_n\}$ را پایه متداول \mathbb{R}^n می‌نامند.

ضرب داخلی و هندسه اقلیدسی در \mathbb{R}^n (۲)

در پایان جلسه گذشته مشاهده کردیم که اگر پایه متداول \mathbb{R}^n باشد، هر عنصر x از \mathbb{R}^n را می‌توان به صورت

$$x = \sum_{i=1}^n (x \cdot e_i) e_i \quad (۱)$$

نمایش داد. حال به یک تعمیم این مطلب اشاره می‌کنیم. به طور کلی، اگر $\{b_1, \dots, b_k\}$ یک مجموعه در \mathbb{R}^n باشد (در حالت خاص، پایه‌ای برای زیرفضای خطی E از \mathbb{R}^n)، $\{b_1, \dots, b_k\}$ را متعامد می‌نامیم در صورتی که برای $b_i \perp b_j$ برای $i \neq j$. مجموعه $\{b_1, \dots, b_k\}$ را راست هنجار می‌نامیم در صورتی که متعامد باشد و به علاوه $|b_i| = 1$ برای $i = 1, \dots, k$. به عنوان نمونه، $\{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه راست هنجار برای \mathbb{R}^n است و هرگاه اعداد حقیقی ناصفر c_1, \dots, c_n داده شده باشند، $\{c_1 e_1, \dots, c_n e_n\}$ یک پایه متعامد برای \mathbb{R}^n است. حال فرض کنید $\{b_1, \dots, b_k\}$ یک پایه راست هنجار برای زیرفضای خطی E باشد و $x \in E$. داریم $x = \sum_{i=1}^k t_i b_i$. اگر ضرب داخلی دو طرف را با b_j ، j ثابت، محاسبه کنیم، حاصل می‌شود $x \cdot b_j = \sum_{i=1}^k t_i (b_i \cdot b_j)$. از آنجا که پایه راست هنجار است، نتیجه می‌شود که $b_i \cdot b_j = 0$ اگر $i \neq j$ و $b_j \cdot b_j = 1$ پس $x \cdot b_j = t_j$. بنابراین عین فرمول (۱) در اینجا نیز برقرار است:

$$x = \sum_{i=1}^k (x \cdot b_i) b_i \quad (۲)$$

بدین ترتیب محاسبه ضرایب نمایش نسبت به یک پایه راست هنجار بسیار ساده است. به زودی یک روش عمومی برای ساختن پایه‌های راست هنجار برای زیرفضاهای خطی ارائه خواهیم کرد، ولی مقدمتاً گزاره زیر را مطرح می‌کنیم:

(۱-۱۰) گزاره. اگر $\{B_1, \dots, B_k\}$ یک مجموعه متعامد متشکل از عناصر ناصفر \mathbb{R}^n باشد، آنگاه $\{B_1, \dots, B_k\}$ مستقل خطی است.

اثبات. فرض کنید $c_1 B_1 + \dots + c_k B_k = \mathbf{0}$ باید ثابت کنیم همه c_i ها صفر هستند. برای j ثابت و دلخواه، حاصل ضرب داخلی دو طرف رابطه را با B_j محاسبه می‌کنیم:

$$c_1 (B_1 \cdot B_j) + \dots + (B_k \cdot B_j) = 0$$

ولی $B_i \cdot B_j = 0$ مگر وقتی که $i = j$ که در این صورت $B_j \cdot B_j = |B_j|^2$ ناصفر است زیرا که همه B_1, \dots, B_k ناصفر فرض شده‌اند. پس از رابطه $c_j |B_j|^2 = 0$ نتیجه می‌گیریم که $c_j = 0$. چون j در بین $1, \dots, k$ دلخواه بود، حکم به اثبات می‌رسد. \square

اکنون نشان می‌دهیم چگونه می‌توان به کمک هر پایه داده شده برای زیرفضای خطی E ، یک پایه راست هنجار برای E ساخت:

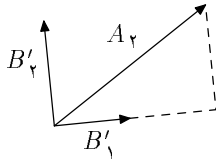
(۲-۱۰) روش گرام-اشمیت. فرض کنید E یک زیرفضای خطی k -بعدی از \mathbb{R}^n است که متشکل از ترکیب‌های خطی $t_1 A_1 + \dots + t_k A_k$ از مجموعه مستقل خطی $\{A_1, \dots, A_k\}$ می‌باشد. می‌خواهیم یک پایه راست هنجار $\{B_1, \dots, B_k\}$ برای E بسازیم. برای این کار نخست یک پایه متعامد $\{B'_1, \dots, B'_k\}$ برای E به دست می‌آوریم، سپس با قرار دادن $B_i = \frac{1}{|B'_i|} B'_i$ ، یک پایه راست هنجار حاصل می‌شود.

برای ساختن $\{B'_1, \dots, B'_k\}$ ، گام به گام به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$(1) \quad B'_1 = A_1 \text{ قرار می‌دهیم.}$$

(2) برای ساختن B'_2 ، تصویر قائم A_2 بر $B'_1 = A_1$ را از A_2 کم می‌کنیم:

$$B'_2 = A_2 - \frac{A_2 \cdot B'_1}{B'_1 \cdot B'_1} B'_1 \quad (3)$$



توجه کنید که $B'_2 \perp B'_1$ زیرا حاصل ضرب داخلی طرف راست با B'_1 صفر می‌شود. به علاوه $B'_2 \neq \mathbf{0}$ زیرا که اگر $B'_2 = \mathbf{0}$ ، آنگاه با توجه به این که $A_1 = B'_1$ ، یک رابطه وابستگی خطی $\{A_1, A_2\}$ پدید می‌آید که خلاف فرض استقلال خطی $\{A_1, \dots, A_k\}$ و در نتیجه استقلال خطی هر زیرمجموعه آن، است. نتیجه این که بنابر گزاره $1-10$ ، $\{B'_1, B'_2\}$ مستقل خطی است. ضمناً توجه کنید که $\langle B'_1, B'_2 \rangle = \langle A_1, A_2 \rangle$ زیرا که $B'_1 = A_1$ و طبق (3) می‌توان نقش A_2 و B'_2 را مبادله کرد.

(3) به طور استقرایی می‌توان به این روش ادامه داد. اگر $\{B'_1, \dots, B'_j\}$ به دست آمده باشد، $j < k$ ، که عناصر آن ناصفر و دو به دو بر هم عمودند به طوری که $\langle B'_1, \dots, B'_j \rangle = \langle A_1, \dots, A_j \rangle$ ، B'_{j+1} را به روش زیر می‌سازیم:

$$B'_{j+1} = A_{j+1} - \frac{A_{j+1} \cdot B'_1}{B'_1 \cdot B'_1} B'_1 - \dots - \frac{A_{j+1} \cdot B'_j}{B'_j \cdot B'_j} B'_j \quad (4)$$

در واقع در (4) تصویر قائم A_{j+1} بر تک تک B'_1, \dots, B'_j را از A_{j+1} کم کرده‌ایم. حاصل باید بر B'_1, \dots, B'_j عمود باشد که این موضوع با محاسبه حاصل ضرب داخلی دو طرف راست (4) با B'_i ، $i = 1, \dots, j$ ، مشاهده می‌شود. همچنین توجه کنید که $B'_{j+1} \neq \mathbf{0}$ زیرا که طبق فرض

استقراء $\langle A_1, \dots, A_j \rangle = \langle B'_1, \dots, B'_j \rangle$ و $\{A_1, \dots, A_j, A_{j+1}\}$ مستقل خطی است. و بالاخره مجموعه متعامد $\{B'_1, \dots, B'_{j+1}\}$ که همه عناصرش ناصفرند، طبق $1-10$ مستقل خطی است و مجدداً با استدلال مشابه گام ۲ داریم $\langle B'_1, \dots, B'_{j+1} \rangle = \langle A_1, \dots, A_{j+1} \rangle$.

بدین ترتیب با ادامه روش، در گام k به مجموعه $\{B'_1, \dots, B'_k\}$ دست می‌یابیم که از عناصر ناصفر دو به دو برهم عمود در E تشکیل شده است. چون تعداد عناصر برابر بعد E است و مجموعه طبق $1-10$ مستقل خطی است، به یک پایه متعامد برای E دست یافته‌ایم. \square

مثال. تحقیق می‌کنیم که مجموعه $\{A_1, A_2, A_3\}$ در \mathbb{R}^4 که در آن $A_1 = (0, 0, -1, 1)$ ، $A_2 = (1, 0, 2, 0)$ و $A_3 = (1, 1, 3, 0)$ یک مجموعه مستقل خطی است. فرض کنید پس $c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 = \underline{0}$

$$(c_2 + c_3, c_3 - c_1 + 2c_2 + 3c_3, c_1) = (0, 0, 0, 0)$$

نتیجه این که $c_3 = 0$ و $c_1 = 0$ که از اینها نتیجه می‌شود $c_2 = 0$ پس $\{A_1, A_2, A_3\}$ مستقل خطی است. $E = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ را زیرفضای متشکل از ترکیب‌های خطی A_1, A_2, A_3 می‌گیریم، توجه کنید که $\{A_1, A_2, A_3\}$ متعامد نیست، مثلاً $A_1 \cdot A_2 = -2 \neq 0$. روش گرام-اشمیت را به کار می‌گیریم:

$$B'_1 = A_1 = (0, 0, -1, 1)$$

$$B'_2 = (1, 0, 2, 0) - \frac{(1, 0, 2, 0) \cdot (0, 0, -1, 1)}{(0, 0, -1, 1) \cdot (0, 0, -1, 1)} (0, 0, -1, 1) = (1, 0, 2, 0) + (0, 0, -1, 1)$$

یا $B'_2 = (1, 0, 1, 1)$. بالاخره:

$$B'_3 = (1, 1, 3, 0) - \frac{(1, 1, 3, 0) \cdot (0, 0, -1, 1)}{(0, 0, -1, 1) \cdot (0, 0, -1, 1)} (0, 0, -1, 1) - \frac{(1, 1, 3, 0) \cdot (1, 0, 1, 1)}{(1, 0, 1, 1) \cdot (1, 0, 1, 1)} (1, 0, 1, 1)$$

$$= (1, 1, 3, 0) + \frac{3}{4} (0, 0, -1, 1) - \frac{4}{5} (1, 0, 1, 1)$$

$$= \left(-\frac{1}{5}, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

پس مجموعه $\{(0, 0, -1, 1), (1, 0, 1, 1), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$ یک پایه متعامد برای E است، که می توان این مطلب را مستقیماً نیز تحقیق کرد. برای یافتن یک پایه راست هنجار، هر یک از B'_i ها را در معکوس طول آن ضرب می کنیم:

$$B_1 = (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$B_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$B_3 = (-\frac{2}{\sqrt{62}}, \frac{7}{\sqrt{62}}, \frac{1}{\sqrt{62}}, \frac{1}{\sqrt{62}})$$

روش گرام-اشمیت در تکمیل یک مجموعه متعامد (یا راست هنجار) به یک پایه کامل نیز به کار گرفته می شود:

(۱۰-۳) تکمیل مجموعه متعامد به پایه. فرض کنید $\{B_1, \dots, B_k\}$ یک مجموعه راست هنجار از عناصر E باشد که $k < n$. نشان می دهیم چگونه می توان با استفاده از روش ۱۰-۲، عناصر B_{k+1}, \dots, B_n از \mathbb{R}^n یافت، به طوری که $\{B_1, \dots, B_n\}$ یک پایه راست هنجار برای تمام \mathbb{R}^n باشد. چون $k < n$ ، عنصری A_{k+1} از \mathbb{R}^n یافت می شود که در $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$ نیست. به روش گرام-اشمیت با کم کردن تصویر قائم A_{k+1} بر B_1, \dots, B_k ، عنصری B'_{k+1} به دست می آوریم که $\{B_1, \dots, B_k, B'_k\}$ متعامد و مستقل خطی است:

$$B'_{k+1} = A_{k+1} - (A_{k+1} \cdot B_1)B_1 - \dots - (A_{k+1} \cdot B_k)B_k$$

سپس با تعریف $B_{k+1} = \frac{1}{|B'_{k+1}|} B'_{k+1}$ ، یک مجموعه $\{B_1, \dots, B_k, B_{k+1}\}$ حاصل می شود که عناصر آن طول واحد دارند و دو به دو بر هم عمودند (یعنی یک مجموعه راست هنجار). اگر $n = k + 1$ که چون این مجموعه مستقل خطی به تعدادی برابر بعد \mathbb{R}^n عضو دارد، خود یک پایه راست هنجار برای \mathbb{R}^n می شود، $\mathbb{R}^n = \langle B_1, \dots, B_{k+1} \rangle$. اگر $k + 1 < n$ ، عنصری A_{k+2} در \mathbb{R}^n یافت می شود که در $\langle B_1, \dots, B_{k+1} \rangle$ نیست. به روش بالا، از A_{k+2} ، عنصری B_{k+2} می سازیم که

$\{B_1, \dots, B_{k+2}\}$ راست هنجار است. اگر این عمل را $(n-k)$ بار انجام دهیم به یک مجموعه راست هنجار n عضوی $\{B_1, \dots, B_n\}$ می‌رسیم که بنابراین یک پایه برای \mathbb{R}^n خواهد بود.

(۱۰-۴) کاربرد در معادله زیرفضاها. زیرفضای مستوی E از \mathbb{R}^n را یک ابرصفحه در \mathbb{R}^n می‌نامیم در صورتی که بعد E برابر $(n-1)$ باشد. بدین ترتیب ابرصفحه‌های \mathbb{R} ، نقاط \mathbb{R} هستند، ابرصفحه‌های \mathbb{R}^2 ، خطوط راست در \mathbb{R}^2 ، و ابرصفحه‌های \mathbb{R}^3 ، صفحات واقع در \mathbb{R}^3 می‌باشند. حال یک ابرصفحه E از \mathbb{R}^n در نظر بگیرید. اگر E° انتقال یافته E به \circ باشد، می‌توان برای E° یک پایه متعامد $\{B_1, \dots, B_{n-1}\}$ طبق روش گرام-اشمیت در نظر گرفت. با استفاده از ۱۰-۳، عنصری C ، $C \neq \circ$ ، در \mathbb{R}^n وجود دارد که بر B_1, \dots, B_{n-1} عمود است و در نتیجه $\{B_1, \dots, B_{n-1}, C\}$ یک پایه متعامد برای \mathbb{R}^n می‌باشد. توجه کنید که شرطی لازم و کافی برای این که عنصر x از \mathbb{R}^n در E° باشد این است که:

$$C \cdot x = \circ \quad (5)$$

زیرا اگر بنویسیم $x = \sum_{i=1}^{n-1} c_i B_i + c_n C$ عناصر E° دقیقاً آن x هایی هستند که $c_n = \circ$ پس اگر $x \in E$ ، آنگاه $x = \sum_{i=1}^{n-1} c_i (B_i \cdot B_n) = \circ$ بالعکس اگر $C \cdot x = \circ$ داریم

$$\circ = C \cdot x = \sum_{i=1}^{n-1} c_i (C \cdot B_i) + c_n (C \cdot C) = c_n$$

حال فرض کنید ابرصفحه E به شکل $E = \langle p; B_1, \dots, B_{n-1} \rangle$ توصیف شده است که $p = (p_1, \dots, p_n)$ نقطه‌ای در E است. نقطه $x = (x_1, \dots, x_n)$ در E است اگر و تنها اگر $x - p \in E^\circ$ پس شرطی لازم و کافی برای این است که

$$(x - p) \cdot C = \circ \quad (6)$$

اگر n تایی C را به (C_1, \dots, C_n) نمایش دهیم، (۶) معادل است با

$$C_1(x_1 - p_1) + \dots + C_n(x_n - p_n) = 0 \quad (۷)$$

این رابطه را معادله ابرصفحه گذرا از p عمود بر C می نامند. نمایش متداول خط در صفحه و صفحه در فضای سه بعدی حالت های خاص (۷) هستند.

(۷) را می توان به زیرفضاهای مستوی ابعاد غیر از $(n - 1)$ تعمیم داد. اگر E یک زیرفضای مستوی k -بعدی به شکل $E = \langle p; B_1, \dots, B_k \rangle$ باشد که در آن $\{B_1, \dots, B_k\}$ یک پایه متعامد برای انتقال یافته E به مبدأ، E° است، طبق روش (۱۰-۳)، $\{B_1, \dots, B_k\}$ را به پایه ای متعامد $\{B_1, \dots, B_k, B_{k+1}, \dots, B_n\}$ برای \mathbb{R}^n تکمیل می کنیم. با استدلالی مشابه آنچه برای ابرصفحه ها آمد، شرطی لازم و کافی برای این که نقطه x در E باشد این خواهد بود که $x - p$ بر B_{k+1}, \dots, B_n عمود باشد. پس مجموعه نقاطی است که در $(n - k)$ رابطه زیر صدق می کند:

$$B_{k+1} \cdot (x - p) = 0, \dots, B_n \cdot (x - p) = 0 \quad (۸)$$

مثال. می خواهیم در \mathbb{R}^4 فاصله نقطه $(1, -1, 0, 2)$ را از خط راست $\frac{x_1}{1} = \frac{x_2 - 1}{-1} = \frac{x_3 + 1}{-1} = \frac{x_4}{3}$ محاسبه کنیم. مقصود از فاصله نقطه از خط، کوتاهترین فاصله ممکن از نقطه داده شده به نقاط روی خط است. توجه کنید که نقطه داده شده، $(1, -1, 0, 2)$ ، روی خط داده شده قرار ندارد (چرا؟)، پس خط و نقطه روی یک صفحه مستوی منحصر به فرد قرار می گیرند و می توان به روال هندسه عادی فرض کرد کوتاهترین فاصله با رسم عمود از نقطه بر خط به دست می آید (اثباتی مستقیم از این مطلب در تمرین زیر آمده است). با فرض این مطلب برای یافتن پای عمود از $(1, -1, 0, 2)$ به خط داده شده، معادله ابرصفحه گذرا از $(1, -1, 0, 2)$ عمود بر $(2, 1, -1, 3)$ را می نویسیم و اشتراک آن را با خط پیدا می کنیم. نقطه تقاطع نزدیکترین نقطه خط به $(1, -1, 0, 2)$ است. طبق (۷)، معادله

ابرفصفحه مورد نظر هست:

$$2(x_1 - 1) + (x_2 + 1) - x_3 + 3(x_4 - 2) = 0$$

حال با جایگزینی از $\frac{x_2}{3} = \frac{x_3 - 1}{-1} = \frac{x_4 + 1}{-1} = \frac{x_4}{-3}$ در رابطه بالا برحسب x_1 داریم:

$$2(x_1 - 1) + \left(\frac{x_1}{3} + 2\right) + \left(\frac{x_1}{3} + 1\right) + 3\left(\frac{2}{3}x_1 - 2\right) = 0$$

$$x_1 = \frac{2}{3}$$

پس $x_2 = \frac{4}{3}$, $x_3 = -\frac{4}{3}$, $x_4 = 1$ و نقطه $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, 1)$ نزدیکترین نقطه خط به $(1, -1, 0, 2)$ می باشد که فاصله اش برابر مقدار زیر است:

$$\sqrt{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(-1 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + (2 - 1)^2} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

تمرین. فرض کنید در \mathbb{R}^n خط گذرا از a به موازات A است، $a = (a_1, \dots, a_n)$ ، $A = (A_1, \dots, A_n)$ و $a \neq A$ یک نقطه در \mathbb{R}^n است. نشان دهید به ازای نقطه منحصر به فردی q روی l نزدیکترین فاصله به p حاصل می شود و در واقع $q = a + \frac{(p-a) \cdot A}{A \cdot A} A$ (یعنی از نقطه a روی l باید به اندازه تصویر قائم $(p - a)$ روی A جدا کرد تا به نقطه q رسید).

راهنمایی. معادله پارامتری خط l ، $x_i = a_i + tA_i$ را در نظر بگیرید و مجذور فاصله p از نقطه $a + tA$ را برحسب t بنویسید. عبارت به دست آمده، یک عبارت درجه ۲ برحسب t خواهد بود که با توجه به نقطه مینیموم سهمی می توان t مطلوب را از آن محاسبه کرد.

نگاشت‌های خطی (۱)

وقتی $m \times n$ عدد حقیقی a_{ij} ، $i = 1, \dots, m$ ، $j = 1, \dots, n$ را در یک قالب m در n با m ردیف و n ستون به شکل زیر بنویسیم، یک ماتریس $m \times n$ (حقیقی) تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

اعداد مندرج در ماتریس را درایه‌های ماتریس می‌نامند. مقصود از a_{ij} درایه‌ای است که در ردیف i ام و ستون j ام قرار دارد. گاهی اوقات A را به صورت $[a_{ij}]$ ، یا به طور کاملتر $[a_{ij}]_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$ می‌نویسیم.

برای ماتریس‌های هم اندازه می‌توان عمل جمع، و عمل ضرب در اعداد حقیقی، همانند عملیات مشابه برای n تایی‌ها (بردارها) را تعریف کرد. اگر $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ دو ماتریس $m \times n$ باشند، مجموع دو ماتریس، $A + B = [c_{ij}]$ با فرمول

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (1)$$

تعریف می‌شود. تحقیق صحت خواص زیر از تعریف سراسر است:

(۱-۱) خواص ابتدایی جمع ماتریس‌ها

(۱-۱-۱) تعویض‌پذیری (جابجایی). اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ باشند، داریم

$$A + B = B + A$$

(۱۱-۱-۲) شرکت پذیری. اگر A, B و C ماتریس‌های $m \times n$ باشند، داریم $A + (B + C) = (A + B) + C$.

(۱۱-۱-۳) عنصر بی‌اثر. ماتریس صفر $m \times n$ که همه درایه‌های آن صفر است و به O نمایش می‌دهیم (یگانه ماتریس $m \times n$) دارای این ویژگی است که برای هر ماتریس $m \times n$ ، A داریم $A + O = O + A = A$.

(۱۱-۱-۴) عنصر قرینه. برای $A = [a_{ij}]$ ، ماتریس $-A = [b_{ij}]$ که با $b_{ij} = -a_{ij}$ تعریف می‌شود (یگانه ماتریس) دارای این ویژگی است که $A + (-A) = (-A) + A = O$.

حال اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $m \times n$ باشد و $r \in \mathbb{R}$ ، ماتریس $rA = [b_{ij}]$ با فرمول $b_{ij} = ra_{ij}$ تعریف می‌شود، یعنی همه درایه‌های A در عدد r ضرب می‌شوند. تحقیق خواص زیر نیز سراسر است:

(۱۱-۲) خواص ابتدایی ضرب اعداد در ماتریس‌ها

$$(۱۱-۲-۱) 1 \cdot A = A \text{ برای هر ماتریس } A.$$

$$(۱۱-۲-۲) (rs)A = r(sA) \text{ برای هر ماتریس } A \text{ و هر زوج عدد حقیقی } r, s.$$

$$(۱۱-۲-۳) (r+s)A = rA + sA \text{ برای هر ماتریس } A \text{ و هر زوج عدد حقیقی } r, s.$$

$$(۱۱-۲-۴) r(A+B) = rA + rB \text{ برای هر عدد حقیقی } r \text{ و هر دو ماتریس هم اندازه } A \text{ و } B.$$

علاوه بر عملیات بالا، مفهوم ضرب ماتریس‌ها نیز مابین ماتریس‌های اندازه‌های مناسب که توضیح

داده خواهد شد، تعریف می‌شود. اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $m \times n$ و $B = [b_{ij}]$ یک ماتریس $n \times p$ باشد، ماتریس حاصل ضرب، $AB = [c_{ij}]$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \quad (2)$$

توجه کنید که لازمه تعریف حاصل ضرب این است که تعداد ستون‌های A برابر تعداد ردیف‌های B باشد، بنابراین عبارت (۲) معنی دارد و در واقع می‌توان c_{ij} را حاصل ضرب داخلی ردیف i ام ماتریس A به عنوان n تایی (a_{i1}, \dots, a_{in}) با ستون j ام ماتریس B ، به عنوان n تایی (b_{j1}, \dots, b_{nj}) تلقی کرد. انگیزه این تعریف را در جلسه آینده بررسی خواهیم کرد.

(۱۱-۳) خواص ابتدایی ضرب ماتریس‌ها

(۱۱-۳-۱) شرکت پذیری. A ، B و C ماتریس‌های دارای اندازه به ترتیب $m \times n$ ، $n \times p$ و $p \times q$ هستند. در این صورت:

$$(AB)C = A(BC)$$

(۱۱-۳-۲) قانون پخش. داریم

$$(A + B)C = (AC) + (BC) \quad , \quad A(B + C) = (AB) + (AC)$$

مشروط بر این که اندازه ماتریس‌های فوق برای عملیات ذکر شده مناسب باشد.

(۱۱-۳-۳) ماتریس واحد $n \times n$ ، $I_n = [\delta_{ij}]$ بدین صورت تعریف می‌شود که:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

برای هر ماتریس $A, m \times n$ و هر ماتریس $B, n \times p$ داریم:

$$A \cdot I_n = A \quad , \quad I_n \cdot B = B$$

اثبات (۱۱-۳-۱) را ارائه می‌کنیم، دوتای دیگر ساده‌ترند و تحقیق آنها به خواننده واگذار می‌شود. برای (۱۱-۳-۱) بنویسید $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$, $AB = [d_{ij}]$, $BC = [e_{ij}]$ و $(AB)C = [x_{ij}]$ و $A(BC) = [y_{ij}]$. طبق تعریف حاصل ضرب ماتریس‌ها عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \sum_{k=1}^p d_{ik} c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk} c_{kj} \\ &= \sum_{l=1}^n a_{il} \left(\sum_{k=1}^p b_{lk} c_{kj} \right) \\ &= \sum_{l=1}^n a_{il} e_{lj} \\ &= y_{ij} \end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

در اینجا قابل ذکر است که اگر AB تعریف شده باشد، لزومی ندارد BA نیز تعریف شدنی باشد زیرا که تعریف AB مستلزم این است که تعداد ستون‌های A برابر تعداد ردیف‌های B باشد، و این حکمی در مورد برابری تعداد ستون‌های B با تعداد ردیف‌های A نمی‌کند. حتی اگر AB و BA هر دو تعریف شدنی باشند، لزومی ندارد هر دو یک اندازه باشند، مثلاً اگر A یک ماتریس $1 \times n$ و B یک

ماتریس $n \times 1$ باشند، $n > 1$

$$A = [a_1 \dots a_n] \quad , \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

AB یک ماتریس 1×1 ، با تک درایه $\sum_{i=1}^n a_i b_i$ می‌شود، در حالی که BA یک ماتریس $n \times n$ است که درایه ردیف i ام و ستون j ام آن عبارت است از $b_j a_i$. حتی اگر A و B هر دو $n \times n$ ، با $n \geq 2$ باشند، لزومی بر تساوی AB و BA نیست، مثلاً:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

البته در مورد ماتریس I_n و هر ماتریس $n \times n$ ، A ، از $11-3-3$ نتیجه می‌شود که $AI_n = I_n A$ ($A =$).

توجه کنید که برای یک n -تایی مرتب از اعداد، مثلاً $x = (x_1, \dots, x_n)$ اکنون سه نمایش ممکن داریم، یکی به صورت بالا که معمولاً تجسم برداری دارد، دیگر به صورت یک ماتریس $1 \times n$ ، $[x_1 \dots x_n]$ و بالاخره به صورت یک ماتریس $n \times 1$ ، $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. اغلب لازم است که بین این سه نمایش تمایز قائل شویم تا ابهامی در عملیات حاصل نشود. برای این منظور، هرگاه n تایی $x = (x_1, \dots, x_n)$ به صورت یک ماتریس $1 \times n$ نوشته شود، آن را به $|x\rangle$ نمایش می‌دهیم، و هرگاه به صورت یک ماتریس $n \times 1$ نمایش داده شود، آن را به $|x\rangle$ نمایش می‌دهیم.

با این مقدمه در مورد ماتریس‌ها، به موضوع اصلی درس که "نگاشت‌های خطی" است می‌پردازیم. کلمات "تابع"، "نگاشت" و "تبدیل" در اینجا به صورت کاملاً مترادف به کار خواهند رفت هر چند که به لحاظ تاریخی گاهی تصاویر ذهنی متفاوتی از این کلمات القاء می‌شود. اگر S و T دو مجموعه باشند، مقصود از یک تابع ($=$ نگاشت، $=$ تبدیل) از S به T ، قانونی f است که به هر عنصر s از S ، عنصر مشخصی $f(s)$ از T نسبت می‌دهد. می‌نویسیم $f: S \rightarrow T$. در گذشته کلمه "تابع" معمولاً وقتی به کار می‌رفته است که T برابر \mathbb{R} یا \mathbb{C} باشد، "تبدیل" در حالت $S = T$ ، یعنی تابع‌های از یک مجموعه

به خود آن، و "نگاشت" برای تابع‌های $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ بزرگتر از ۱، به کار می‌رفته است. ما چنین تمایزهایی قابل نمی‌شویم. برای تابع $f: S \rightarrow T$ ، مجموعه S را دامنه (= قلمرو)، و مجموعه T را بُرد می‌نامیم. مجموعه $\{f(s) \mid s \in S\}$ که یک زیرمجموعه T است، تصویر f ، یا تصویر S تحت f خوانده می‌شود. در واقع برای هر زیرمجموعه E از S ، تصویر E تحت f ، که به $f(E)$ نمایش داده می‌شود به صورت:

$$f(E) = \{f(s) \mid s \in E\}$$

تعریف می‌شود. تابع f را یک به یک می‌نامیم در صورتی که $f(s_1) = f(s_2)$ همواره نتیجه دهد $s_1 = s_2$ ، و f پوشا می‌نامیم اگر $f(S) = T$. برای تابع‌های یک به یک و پوشا، $f: S \rightarrow T$ ، تابعی به نام وارون f (یا معکوس f) به صورت زیر تعریف می‌شود که به $f^{-1}: T \rightarrow S$ نمایش می‌دهیم. هرگاه $t \in T$ ، چون f پوشا است، عنصری s از S وجود دارد که $f(s) = t$. به علاوه چون f یک به یک فرض شده است، چنین عنصر s به طور منحصر به فرد تعیین می‌شود، پس f^{-1} به صورت قانونی بی‌ابهام $f^{-1}(t) = s$ تعریف شدنی است و داریم:

$$f \circ f^{-1} = \mathbb{1}_T \quad , \quad f^{-1} \circ f = \mathbb{1}_S$$

که مقصود از $\mathbb{1}_X$ تابع همانی مجموعه X است، $\mathbb{1}_X(x) = x$ برای هر $x \in X$. نماد $f^{-1}(t)$ حتی وقتی f^{-1} تعریف شدنی نباشد نیز به کار می‌رود. مقصود از $f^{-1}(t)$ مجموعه نقاط S است که تحت f به t فرستاده (= نگاشته) می‌شوند، یعنی:

$$f^{-1}(t) = \{s \in S \mid f(s) = t\}$$

$f^{-1}(t)$ را گاهی مجموعه تراز منسوب به t می‌خوانیم. به طور کلی، اگر Y زیرمجموعه‌ای از T باشد، زیرمجموعه $f^{-1}(Y)$ (تصویر وارون Y) یک زیرمجموعه S است که بدین صورت تعریف می‌شود:

$$f^{-1}(Y) = \{s \in S \mid f(s) \in Y\}$$

موضوع اصلی درس ما بررسی تابع‌های $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (یا به طور کلی‌تر، تابع‌های $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$)، $S \subset \mathbb{R}^n$ است. بدین ترتیب چنین تابع f به هر n تایی مرتب از اعداد حقیقی در دامنه، یک m تایی مرتب از اعداد حقیقی نسبت می‌دهد:

$$f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m) \quad (3)$$

هر y_i وابسته به (x_1, \dots, x_n) است، پس در واقع ارائه f همانند ارائه m تابع f_1, \dots, f_m ، هر یک از \mathbb{R}^n به \mathbb{R} است، $f_i(x_1, \dots, x_n) = y_i$ ، $i = 1, \dots, m$. (3) را به صورت زیر نیز می‌نویسیم:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = y_1 \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = y_m \end{cases} \quad (4)$$

گاهی می‌نویسیم $f = (f_1, \dots, f_m)$ و هر f_i را یک مؤلفه f می‌نامیم.

تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ در (3) یا (4) را خطی می‌نامیم در صورتی که هر $f_i(x_1, \dots, x_n)$ یک

عبارت همگن درجه اول نسبت به x_1, \dots, x_n باشد، یعنی:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases} \quad (5)$$

مقصود از "همگن" این است که همه جملات سمت راست از یک درجه‌اند، در اینجا همه از درجه

۱، بالاخص جمله ثابت وجود ندارد. اگر هر عبارت سمت راست را فقط درجه ۱ در نظر بگیریم و

محدودیت همگن را حذف کنیم، یک عدد ثابت نیز ممکن است به هر جمله افزوده شود. این گونه

تابع‌ها را مستوی می‌نامیم:

$$\begin{cases} y_1 = a_{10} + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ y_m = a_{m0} + a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases} \quad (6)$$

مقدار تابع مستوی (۶) از انتقال مقدار تابع (۵) با $-m$ تایی ثابت (a_{10}, \dots, a_{m0}) به دست می آید و نیازی به بررسی جداگانه تابع های مستوی نیست.

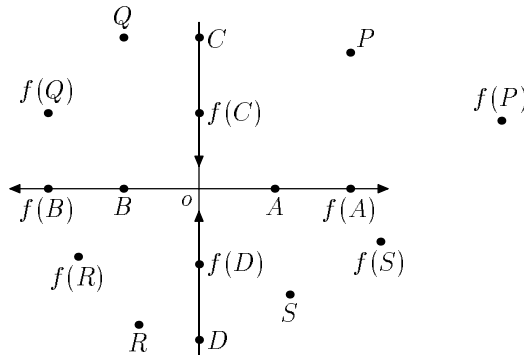
(۱۱-۴) چند مثال

(۱۱-۴-۱) هر تابع خطی $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به شکل $f(x) = mx$ است که در آن $m \in \mathbb{R}$ یک عدد حقیقی داده شده است. تابع های مستوی $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به شکل $g(x) = mx + b$ ، m و b اعداد حقیقی داده شده، می باشند.

(۱۱-۴-۲) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$f(x_1, x_2) = (2x_1, \frac{1}{4}x_2)$$

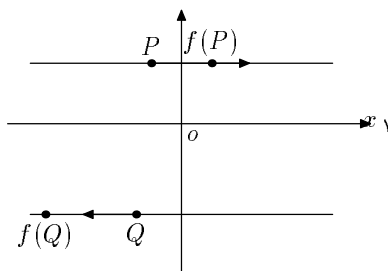
هر دو عبارت $2x_1$ و $\frac{1}{4}x_2$ درجه ۱ همگن نسبت به (x_1, x_2) هستند، پس f خطی است. عملکرد این تابع بدین صورت است که فاصله هر نقطه را از محور x_2 به دو برابر افزایش می دهد و فاصله آن از محور x_1 را نصف می کند. محور x_1 با ضریب تجانس ۲ به خود آن نگاشته می شود (انبساط با ضریب ۲)، و محور x_2 با ضریب تجانس $\frac{1}{4}$ روی خود منقبض می شود. (شکل ۱)



(۱۱-۴-۲) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$$

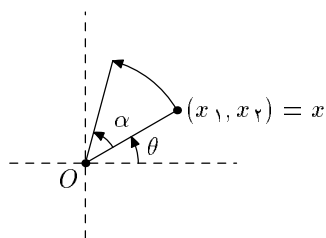
f خطی است. توجه کنید که هر خط راست افقی $x_2 = c$ به خود آن نگاشته می‌شد ولی هر نقطه روی این خط به اندازه مقدار c انتقال افقی می‌یابد. بدین ترتیب خطوط راست افقی بالای محور x_1 به طرف راست و خطوط افقی پایین محور x_1 به سمت چپ روی خود می‌لغزند. نقاط محور x_1 سر جای خود ثابت می‌مانند.



(۱۱-۴-۳) (دوران حول \underline{e} در \mathbb{R}^2) دوران حول \underline{e} در \mathbb{R}^2 با زاویه α را در نظر بگیرید. اگر

$x = (x_1, x_2)$ نقطه‌ای $\underline{e} \neq$ در صفحه باشد، نمایش آن به صورت قطبی در نظر بگیرید:

$$x_2 = |x| \sin \theta, \quad x_1 = |x| \cos \theta$$



اگر دوران زاویه α حول \underline{e} را به $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ نمایش دهیم، نمایش قطبی $f(x_1, x_2)$ می‌شود:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (|x| \cos(\theta + \alpha), |x| \sin(\theta + \alpha)) \\ &= (|x| \cos \theta \cos \alpha - |x| \sin \theta \sin \alpha, |x| \sin \theta \cos \alpha + |x| \cos \theta \sin \alpha) \\ &= ((\cos \alpha)x_1 - (\sin \alpha)x_2, (\sin \alpha)x_1 + (\cos \alpha)x_2) \end{aligned}$$

هریک از دو مؤلفه f یک تابع درجه یک همگن نسبت به (x_1, x_2) است، پس f خطی است.

(۱۱-۴-۴) (تصویر قائم روی یک زیرفضای مختصاتی) فرض کنید $n > m$ و $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ را

به صورت زیر تعریف کنید

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$$

این تابع خطی است و عملکرد آن این است که نقطه (x_1, \dots, x_n) را به (x_1, \dots, x_m) ، متشکل از m

مؤلفه اول آن، می‌نگارد. مثلاً برای $n = 3$ و $m = 2$ ، $f(x, y, z) = (x, y)$ تصویر قائم (x, y, z) روی صفحه xy است.

(۱۱-۴-۵) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2, -x_2)$$

چون هر مؤلفه f یک عبارت درجه یک همگن نسبت به (x_1, x_2) است، این تابع خطی است.

(۱۱-۴-۶) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, x_1 x_2)$$

این تابع خطی نسبت زیرا مؤلفه دوم f ، یعنی $x_1 x_2$ از درجه یک نیست.

اکنون ارتباط میان دو بحث این جلسه را بیان می‌کنیم. توجه کنید که می‌توان (۵) را به صورت زیر

نوشت:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

یا به طور موجز:

$$|y\rangle = A|x\rangle \quad (8)$$

یعنی محاسبه مقدار یک تابع خطی بدین صورت حاصل می‌شود که ضرایب a_{ij} در (۵) را در یک ماتریس $m \times n$ قرار می‌دهیم و حاصل ضرب این ماتریس را با ستون $|x\rangle$ محاسبه می‌کنیم. بدین ترتیب یک تناظر یک به یک میان تابع‌های خطی $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ و ماتریس‌های $m \times n$ ایجاد می‌شود.

برای مثال‌های خطی بالا، ماتریس‌های مربوط به ترتیب از بالا به پایین عبارتند از:

$$\begin{aligned}
 & [m] \\
 & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

با نگاه کردن به ماتریس متناظر به یک تابع خطی می‌توان عمل تابع خطی بر اعضای پایه متداول، یعنی e_1, \dots, e_n را فوراً دریافت. توجه کنید که اگر ماتریس $A = [a_{ij}]$ از سمت چپ در ستون $|e_j\rangle$ ضرب شود، ستون j -ام ماتریس $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ به دست می‌آید. بدین ترتیب، برای نوشتن ماتریس مربوط به یک تابع خطی f ، کافی است $f(e_1), \dots, f(e_n)$ را محاسبه کنیم و نتایج حاصل را به ترتیب در ستون‌های اول تا n ام درج کنیم.

نگاشت‌های خطی (۲)

مثال‌هایی که از تابع‌های خطی در جلسه گذشته ارائه کردیم از تنوع قابل ملاحظه‌ای برخوردار بود و ممکن است این احساس را ایجاد کرده باشد که وجه تشابه چندانی میان تابع‌های خطی موجود نیست. در چند جلسه آینده، برعکس، خواهیم دید که تابع‌های خطی از بعضی وجوه شباهت‌های فوق‌العاده‌ای به هم دارند. بررسی این خواص دست‌آوردهای مهمی برای ما خواهد داشت. یکی از این دستاوردها امکان بحث کامل در مورد وجود و نظام جواب‌های یک دستگاه m معادله n مجهولی درجه اول است که به آن خواهیم پرداخت. دستاوردی دیگر زمینه‌سازی برای بررسی توابع غیرخطی در باقیمانده درس است که در آنجا، آنچه در چند جلسه آینده در مورد تابع‌های خطی خواهیم دید رهنمودی مهم خواهد بود. در این جلسه زمینه را برای مطالعه تابع‌های خطی فراهم می‌کنیم. کار عمده ما بازبینی بعضی تعاریف و مفاهیمی خواهد بود که در جلسات قبل مطرح شده‌اند و اکنون آنها را به صورتی قابل استفاده در می‌آوریم.

(۱۲-۱) گزاره. تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ خطی است در صورتی که واجد دو شرط زیر باشد:

الف) برای هر x و x' در \mathbb{R}^n ، $f(x + x') = f(x) + f(x')$.

ب) برای هر x در \mathbb{R}^n و هر عدد حقیقی r ، $f(rx) = rf(x)$.

اثبات. اگر $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ خطی باشد، ماتریس متناظر با آن، A ، را در نظر می‌گیریم. عملکرد f روی عناصر x از \mathbb{R}^n به صورت:

$$|f(x)\rangle = A|x\rangle \quad (۱)$$

است. بنابراین:

$$\begin{aligned} |f(x+x')\rangle &= A|x+x'\rangle \\ &= A|x\rangle + A|x'\rangle \quad \text{قانون پخشی ضرب ماتریسی} \\ &= |f(x)\rangle + |f(x')\rangle \end{aligned}$$

پس (الف) برقرار است. همین طور:

$$\begin{aligned} |f(rx)\rangle &= A|rx\rangle \\ &= r(A|x\rangle) \end{aligned}$$

و (ب) برقرار است. بالعکس فرض کنید شرط‌های (الف) و (ب) برای تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ برقرارند. باید نشان دهیم ماتریسی $A, m \times n$ وجود دارد که برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داریم $|f(x)\rangle = A|x\rangle$. از بحث پایان جلسه قبل به یاد می‌آوریم که ستون‌های ماتریس یک تابع خطی به ترتیب از مؤلفه‌های $f(e_1)$ تا $f(e_n)$ تشکیل می‌شوند، بنابراین نامزد واضحی برای ماتریس مورد نظر A وجود دارد که باید در مورد آن ادعای $|f(x)\rangle = A|x\rangle$ را ثابت کرد. ماتریس A را این گونه در نظر می‌گیریم که ستون j -ام آن، برای $j = 1, \dots, n$ برابر $|f(e_j)\rangle$ باشد. برای $x = (x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ داریم:

$$\begin{aligned} |f(x)\rangle &= |f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)\rangle \\ &= |x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)\rangle \quad \text{طبق (الف) و (ب)} \\ &= |x_1 f(e_1)\rangle + \dots + |x_n f(e_n)\rangle \\ &= x_1 |f(e_1)\rangle + \dots + x_n |f(e_n)\rangle \\ &= x_1 (A|e_1\rangle) + \dots + x_n (A|e_n\rangle) \\ &= A|x_1 e_1\rangle + \dots + A|x_n e_n\rangle \\ &= A|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\rangle \quad \text{قانون پخشی ضرب ماتریسی} \\ &= A|x\rangle \end{aligned}$$

□ و حکم به اثبات می‌رسد.

بدین ترتیب از این پس برای استفاده از خطی بودن یک تابع به کارگیری دو خاصیت (الف) و (ب) بالا کافی است و نیازی به نوشتن صریح ماتریس مربوط نیست.

در جلسه قبل ضرب ماتریسی را تعریف کردیم. این تعریف در نظر اول دور از ذهن و فاقد انگیزه مشخص به نظر می‌رسد، ولی گزاره زیر نشان می‌دهد که حاصل ضرب دو ماتریس در واقع بیانگر ترکیب تابع‌های خطی متناظر است.

(۱۲-۲) گزاره. تابع‌های خطی $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ با ماتریس A و $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ با ماتریس B داده شده‌اند. در این صورت ماتریس $g \circ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ برابر BA است.

اثبات. مقدمتاً توجه کنید که $g \circ f$ در واقع یک تابع خطی است که این مطلب را می‌توان با استفاده از گزاره ۱۲-۱ ملاحظه کرد:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x + x') &= g(f(x + x')) \\ &= g(f(x) + f(x')) && \text{چون } f \text{ خطی است} \\ &= g(f(x)) + g(f(x')) && \text{چون } g \text{ خطی است} \\ &= (g \circ f)(x) + (g \circ f)(x')\end{aligned}$$

به همین روش

$$\begin{aligned}(g \circ f)(rx) &= g(f(rx)) \\ &= g(rf(x)) && \text{چون } f \text{ خطی است} \\ &= rg(f(x)) && \text{چون } g \text{ خطی است} \\ &= r(g \circ f)(x)\end{aligned}$$

حال به اثبات ادعای گزاره می پردازیم. ماتریس $g \circ f$ را به C نمایش می دهیم. داریم:

$$\begin{aligned} C|x\rangle &= |(g \circ f)(x)\rangle \\ &= |g(f(x))\rangle \\ &= B|f(x)\rangle \\ &= B|(A|x)\rangle \\ &= BA|x\rangle \end{aligned}$$

بنابر ویژگی شرکت پذیری ضرب ماتریسی

پس $C|x\rangle = BA|x\rangle$. اگر حاصل ضرب دو ماتریس $p \times n$ در هر ستون n تایی برابر باشد، دو ماتریس

برابرند زیرا که با گرفتن $x = e_j, j = 1, \dots, n$ ، کلیه ستون های ماتریس ها به دست می آیند. \square

بالاخره ضابطه ساده ای برای تحقیق کردن این مطلب که آیا یک زیرمجموعه E از \mathbb{R}^n یک

زیرفضای خطی است ارائه می کنیم.

(۱۲-۳) گزاره. زیرمجموعه ناتهی E از \mathbb{R}^n یک زیرفضای خطی \mathbb{R}^n است اگر و تنها اگر دو شرط

زیربرقرار باشند:

الف) هرگاه x و x' در E باشند، آنگاه $x + x'$ نیز در E است.

ب) هرگاه x در E باشد و $r \in \mathbb{R}$ آنگاه rx نیز در E است.

اثبات. نخست نشان می دهیم هر زیرفضای خطی E از \mathbb{R}^n از دو ویژگی فوق برخوردار است.

زیرفضای خطی E را به شکل $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$ ، یعنی مجموعه ترکیب های خطی $\{A_1, \dots, A_k\}$ ،

که یک مجموعه مستقل خطی عناصر E است، در نظر می گیریم. پس x و x' به شکل

$$x = t_1 A_1 + \dots + t_k A_k \quad \text{و} \quad x' = t'_1 A_1 + \dots + t'_k A_k$$

$$x + x' = (t_1 + t'_1) A_1 + \dots + (t_k + t'_k) A_k$$

و $x, x' \in E$ همین طور:

$$r(t_1 A_1 + \dots + t_k A_k) = (rt_1) A_1 + \dots + (rt_k) A_k$$

و $rx \in E$.

بالعکس فرض کنید زیرمجموعه ناتهی E از \mathbb{R}^n واجد شرطهای (الف) و (ب) باشد، نشان می‌دهیم E یک زیرفضای خطی است، یعنی برابر مجموعه ترکیب‌های خطی یک مجموعه مستقل خطی می‌باشد. قطعاً داریم $\underline{0} \in E$ زیرا که E ناتهی است یعنی عنصری x در E هست، پس طبق (ب) $\underline{0} = 0 \cdot x$ در E قرار دارد.

اگر E عضو دیگری نداشته باشد، یعنی $E = \{\underline{0}\}$ که طبق قرارداد E یگانه زیرفضای خطی صفر بعدی \mathbb{R}^n است. اگر عضو دیگری $\underline{0} \neq A_1$ در E باشد، طبق (ب)، همه مضارب A_1 ، یعنی rA_1 ها، $r \in \mathbb{R}$ در E هستند. حال اگر عضو دیگری در E نباشد، یعنی $E = \langle A_1 \rangle$ ، E یک زیرفضای خطی یک بعدی است. در غیراین صورت عنصری A_2 در E وجود دارد که مضرب A_1 نیست، و در نتیجه $\{A_1, A_2\}$ مستقل خطی است. طبق (الف) و (ب)، همه ترکیب‌های خطی A_1 و A_2 در E قرار دارند، یعنی $\langle A_1, A_2 \rangle \subset E$.

اگر $\langle A_1, A_2 \rangle$ همه E باشد که حکم ثابت شده است، و گرنه، عنصری A_3 در E وجود دارد که $\{A_1, A_2, A_3\}$ مستقل خطی است. استدلال بالا را مجدداً به کار می‌گیریم. همه ترکیب‌های خطی A_1, A_2, A_3 طبق (الف) و (ب)، باید در E باشند. در صورتی که $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ همه E نباشد، عنصری A_4 انتخاب می‌کنیم و غیره. این استدلال باید در حداکثر n گام به نتیجه رسد زیرا در \mathbb{R}^n یک مجموعه مستقل خطی نمی‌تواند بیش از n عضو داشته باشد. بنابراین اگر E فقط از $\underline{0}$ تشکیل نشده باشد، در گامی k ، $1 \leq k \leq n$ ، به این نتیجه می‌رسیم که $\langle A_1, \dots, A_k \rangle = E$ و حکم به اثبات می‌رسد. \square

توجه کنید که این گزاره نوعی تایید برقرار بودن ایده شهودی "مسطح بودن" زیرفضاهای خطی است. اگر نقطه‌ای x در E باشد خط گذرا از $\underline{0}$ و x به تمامی در E واقع است، و اگر x و x' در E باشند، صفحه گذرا از $\underline{0}$ ، x و x' در E واقع است. طبق قسمت دوم گزاره، اگر این دو شرط برای E برقرار باشند می‌توان حکم کرد که E متشکل از همه ترکیب‌های خطی k عضو \mathbb{R}^n است.